Modulo 1 Oscillazioni, onde e suoni

Unità 1 Le oscillazioni

1.0 Capita spesso di osservare oggetti che oscillano oppure vibrano periodicamente: una barca che si solleva e si abbassa seguendo le onde del mare, le fronde di un albero mosse dal vento, un lampadario che oscilla, la corda di una chitarra che vibra dopo esser stata pizzicata, … Caratteristiche simili presentano anche molti fenomeni che non possiamo osservare direttamente: le oscillazioni della corrente elettrica che preleviamo da una presa, le vibrazioni del quarzo che costituisce il cuore degli orologi, quelle degli atomi di un corpo solido , …

Ai fenomeni oscillatori, comunissimi in natura e largamente utilizzati nella tecnica, è dedicata questa Unità, che ne mette in luce le proprietà essenziali, riconducendoli a un moto particolare, il moto armonico, che è caratterizzato da una legge oraria di tipo sinusoidale.
(figura da trovare)

1.1 Il moto armonico

Molti tipi di oscillazioni seguono spontaneamente, in modo più o meno esatto, una legge sinusoidale. E in tal caso tutte le grandezze che descrivono il moto - spostamenti, velocità e accelerazioni - seguono una legge sinusoidale. Che si configura dunque come la legge naturale per una estesissima categoria di fenomeni.

Il modello di riferimento per queste oscillazioni prende il nome di **moto armonico**. Più precisamente, si chiama moto armonico quello di un punto il cui spostamento rispetto a un'origine prefissata segue una legge oraria sinusoidale, come quella rappresentata nella figura 1 che è espressa dalla formula:

(1) $$s(t) = s_o \cos \omega t$$

dove s_o rappresenta l'ampiezza dell'oscillazione, cioè il massimo valore dello spostamento, e ω è una costante caratteristica del moto, chiamata **pulsazione,** che si misura in *radianti al secondo* (**rad/s**). Si parla di moto armonico, inoltre, anche a proposito di una qualsiasi grandezza fisica, le cui variazioni nel tempo seguono una legge sinusoidale: la pressione di un suono, l'intensità di una corrente elettrica, la temperatura media di un dato luogo nel corso delle stagioni, … Cioè moto armonico, in termini generali, è sinonimo di oscillazione sinusoidale.

Che cosa significa scrivere s(t)?
Significa porre in evidenza che la grandezza s è una funzione del tempo t. Naturalmente questa notazione è del tutto generale. Per esempio possiamo usarla per esprimere il volume V di un cubo in funzione della lunghezza L dello spigolo nella forma: $V(L) = L^3$.

Esempio 1. Calcoliamo gli spostamenti di un moto armonico.
Vogliamo calcolare gli spostamenti del punto P in figura 1, che compie un moto armonico con pulsazione $\omega = 2\pi$ rad/s e spostamento massimo $s_o = 1$ m, agli istanti $t_1 = 0$; $t_2 = 0{,}125$ s; $t_3 = 0{,}25$ s; $t_4 = 0{,}375$ s, per verificare i primi quattro punti tracciati nel grafico.
Utilizzando la formula (1), scritta nella forma $s(t) = \cos(2\pi t)$, abbiamo:
$s(t_1) = \cos(0) = 1$; $s(t_2) = \cos(2\pi\times0{,}125) = 0{,}707$; $s(t_3) = \cos(2\pi\times0{,}25) = 0$; $s(t_3) = \cos(2\pi\times0{,}375) = -0{,}707$. (Notate che nei calcoli precedenti l'argomento della funzione coseno è espresso in radianti, sicché usando una calcolatrice questa va predisposta per radianti e non per gradi.)

Approfondimento 1. Moti armonici: seno o coseno?
Cambia qualcosa se nella formula (1) sostituiamo la funzione coseno con la funzione seno? Non certamente la natura armonica del moto, che resta la medesima. Cambia invece la *fase* del moto.
In effetti l'espressione più generale di un moto armonico è:

(1a) $$s(t) = s_o \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

dove ϕ rappresenta appunto la fase e si misura in radianti (o gradi). In che senso l'espressione (1a) è generale? Perché quando $\phi = \pi/2$ da essa si riottiene la (1), mentre quando $\phi = 0$ si ha $s(t) = s_o$ sen ωt, ricordando che sen$(\alpha+\pi/2) = \cos(\alpha)$. Dal valore della fase, naturalmente, dipende il valore della funzione ai diversi istanti di tempo. Per t = 0, in particolare, dalla (1) si ha $s(0) = s_o$; dalla (1a), $s(0) = s_o$ sen ϕ. Notate poi che il grafico della legge (1a) è sostanzialmente lo stesso per qualsiasi valore della fase ϕ: quello che cambia è soltanto la sua posizione rispetto all'origine.

Periodo e frequenza di un moto armonico

Si chiamano **periodici**, come sapete (→ Tomo I, Unità xxx), i fenomeni che si ripetono uguali a se stessi dopo un ciclo completo, e quindi anche dopo un qualsiasi numero intero di cicli. E si chiama **periodo** la durata T di un singolo ciclo. Un moto armonico è periodico per definizione, in base alla formula (1), ricordando che la funzione seno è una funzione periodica del suo argomento. Più precisamente, un moto armonico si ripete esattamente dopo il tempo che occorre perché la funzione cos ωt torni ad assumere uno stesso valore, cioè il suo argomento ωt subisca una variazione di 2π. Si conclude che il periodo T di un moto armonico di pulsazione ω è:

(2) $$T = 2\pi/\omega$$

Ricordiamo anche che la **frequenza** f di un fenomeno periodico rappresenta il numero di cicli che si svolgono nell'unità di tempo, cioè in 1 secondo. Questa grandezza, che si misura in *hertz* (**Hz**), è data dal reciproco del periodo. E quindi la frequenza di un moto armonico con pulsazione ω è:

(3) $$f = 1/T = \omega/2\pi$$

Da questa si ricava la relazione fra la pulsazione e il periodo: $\omega = 2\pi/T$.

Notate che i valori numerici della frequenza e della pulsazione sono direttamente proporzionali fra loro: per esempio, se f = 1 Hz allora ω = 6,28 rad/s; se ω = 314 rad/s allora f = 50 Hz. Cioè *pulsazione e frequenza rappresentano entrambe*, in modi diversi, *la stessa cosa*: la rapidità con cui il fenomeno periodico si ripete. E per questo la pulsazione ω prende anche il nome di *frequenza angolare*.

Esempio 2. Calcoliamo il periodo e la pulsazione di un suono puro.
Vogliamo calcolare il periodo e la pulsazione del suono della nota la, la cui frequenza è f = 440 Hz. Dalla formula (3) ricaviamo il periodo del suono: $T = 1/f = 1/440 = 2{,}273\cdot10^{-3}$ s = 2,273 ms. Dalla stessa formula ricaviamo la pulsazione del suono: $\omega = 2\pi f = 6{,}28\times440 = 2765$ rad/s.

Esempio 3. Calcoliamo la frequenza delle oscillazioni del quarzo di un orologio.
Un circuito elettronico divide di un fattore 2^{15} la frequenza f delle oscillazioni del cristallo di quarzo di un orologio per ricavarne un'oscillazione con periodo T = 1 s. Chiamando $f_o = 1/T = 1$ Hz la frequenza ottenuta dividendo per 2^{15} la frequenza incognita f del quarzo, utilizziamo la relazione $f_o = f/2^{15}$ per ricavare $f = f_o\times2^{15} = 32768$ Hz.

Il moto armonico del sistema massa-molla

Un classico esempio di moto armonico è quello di una massa collegata a un punto fisso attraverso una molla. Questa situazione è illustrata nella figura 3, che rappresenta un carrello di massa m attaccato a una molla. Quando la molla si trova in equilibrio (né tesa né accorciata) essa non esercita forze sul carrello, che resta fermo nella posizione di riposo s = 0. Quando invece il carrello si trova in un'altra posizione, non importa se a destra (s>0) o a sinistra (s<0) del punto di riposo, la molla esercita una forza proporzionale allo spostamento s, la cui intensità F è data dalla legge di Hooke: F = -ks, dove k è la costante elastica della molla. Questa forza è detta "di richiamo", perché tende sempre a riportare il carrello verso la posizione di riposo. Infatti, quando s>0 la molla è tesa sicché la forza è diretta verso sinistra; quando s<0 la molla è compressa sicché la forza è diretta verso destra. Diciamo subito che questo tipo di forza di richiamo, cioè con intensità proporzionale allo spostamento, è un ingrediente essenziale del moto armonico. Si trova infatti che se la forza avesse un'altra forma (per esempio dipendesse dal quadrato dello spostamento, $F = -kx^2$) il moto non sarebbe armonico.

Che succede quando spostiamo il carrello, portandolo nella posizione $s = s_o \neq 0$, e poi lo lasciamo libero? La forza esercitata dalla molla tesa accelera il carrello verso la posizione di riposo, sicché esso acquista velocità, e quindi energia cinetica. Quando il carrello raggiunge e poi supera la posizione di riposo, la forza si annulla e poi s'inverte, perché la molla viene compressa. Ma il moto prosegue, gradualmente decelerato, fino a che il carrello si arresta per un attimo e poi torna a muoversi in senso opposto, spinto dalla molla compressa. Viaggiando ora verso destra, il carrello raggiunge nuovamente la posizione iniziale, completando una oscillazione completa nel tempo T; dopodiché il ciclo si ripete.

Possiamo registrare le posizioni del carrello in funzione del tempo, per esempio scattando una serie di fotografie a istanti di tempo successivi oppure dotando il carrello di una penna scrivente su una striscia di carta in moto uniforme. La forma del grafico che otterremo sarà quella stessa rappresentata in figura 1, indicando quindi che il moto del carrello è un moto armonico. Diciamo perciò che un sistema massa-molla costituisce un **oscillatore armonico**.

Gli scambi di energia nel moto armonico

Avrete notato che nel discorso precedente abbiamo trascurato gli attriti, che in pratica provocano dissipazioni di energia il cui effetto è quello di ridurre via via l'ampiezza delle oscillazioni del carrello, ma di questo ci occuperemo nel paragrafo 4. Perché ora ci vogliamo occupare degli scambi di energia che si verificano nel corso di un moto armonico. Vediamo cosa avviene, facendo appunto l'ipotesi che non agiscano forze dissipative e che quindi l'energia posseduta inizialmente dal sistema massa-molla si conservi nel tempo. E qual è questa energia iniziale? Quella immagazzinata nelle molla che abbiamo teso spostando il carrello da 0 a s_o: *energia potenziale elastica*, che possiamo esprimere (→ Tomo I, pag. xxx) nella forma: $U_o = ½\ ks_o^2$. All'istante iniziale non vi sono altre energie da considerare, dato che il carrello, prima di muoversi, si trova evidentemente in quiete e quindi non possiede *energia cinetica*.

Quando liberiamo il carrello, la forza della molla lo sposta, compiendo un lavoro che ne accresce gradualmente l'energia cinetica. Questo processo si arresta quando il carrello passa per il punto di equilibrio, dove la forza della molla si annulla e con essa la sua energia elastica: qui la velocità del carrello è massima e con essa la sua energia cinetica. La situazione s'inverte poi man mano che il carrello continua il suo moto verso l'altro estremo della sua traiettoria. E' ora, infatti, il carrello a compiere lavoro nei confronti della molla, comprimendola, cioè "ricaricandola" di energia. Quando poi esso raggiunge la posizione $-s_o$, arrestandosi per un attimo, la sua energia cinetica si annulla e mentre la molla ha riacquistato una energia pari a quella iniziale.

Il bilancio energetico, in assenza di dissipazioni, è assai semplice. A ogni istante, infatti, l'energia totale E del sistema, somma dell'energia potenziale della molla $U = ½\ ks^2$ e dell'energia cinetica del carrello $K = ½\ mv^2$, è costante e pari all'energia iniziale U_o della molla tesa:

$$E = U + K = ½\ mv^2 + ½\ ks^2 = U_o = ½\ ks_o^2 \quad (4)$$

Quando il carrello si trova agli estremi della sua traiettoria ($s = s_o$ oppure $s = -s_o$), dove si arresta per un istante, la sua energia cinetica è nulla, cioè $K = 0$, e quindi dalla formula (4) si ha $E = U_o$. Quando il carrello passa a tutta velocità per il punto $s = 0$, la molla si trova in equilibrio, cioè $U = 0$, e quindi dalla formula (4) si ha $K = U_o$.

Concludiamo che durante il moto del sistema massa-molla si hanno scambi continui di energia fra la molla e la massa; diciamo anzi scambi totali, dato che a certi istanti tutta l'energia è immagazzinata nella molla, come energia potenziale elastica; ad altri, tutta nel carrello, come energia cinetica. Si tratta di un risultato generale: in qualsiasi moto armonico si verificano continuamente scambi totali fra due forme di energia: potenziale e cinetica (nel caso delle oscillazioni elettriche, fra energia elettrica ed energia magnetica).

Figura 1. Il punto P si muove di moto armonico su una traiettoria rettilinea attorno a un punto fisso, con pulsazione $\omega = 2\pi$ rad/s e spostamento massimo $s_o = 1$ m. Il grafico rappresenta le posizioni assunte dal punto a istanti di tempo successivi durante un ciclo completo di oscillazione, calcolate usando la formula (1).
(adattare da Bergamaschini, vol. D, pag. 6, senza i calcoli a destra, con l'asse dei tempi in orizzontale, tarato in unità di 0,125 s, e con la scritta tempo (s); con la scala verticale, con la scritta spostamento (m), dotata di una griglia orizzontale passante per i punti del grafico, con le scritte, dall'alto: 1; 0,707; 0; -0,707; -1; -0,707; 0; 0,707; 1. Il grafico deve rappresentare un coseno anziché un seno e va esteso (a linea continua) di circa 0,25 s a destra e a sinistra, ma senza aggiungere ulteriori posizioni del punto)

Figura 2. Non tutti i fenomeni periodici sono descritti da una legge sinusoidale. Per esempio, l'attività elettrica del nostro cuore, rappresentata dall'elettrocardiogramma in figura, è certamente periodica (almeno approssimativamente), ma tuttaltro che sinusoidale.
(traccia di elettrocardiogramma, dove la periodicità sia ben visibile)

Figura 3. Il moto del carrello attaccato alla molla è un moto armonico attorno alla posizione di riposo s = 0.
a) La velocità è nulla, la forza esercitata sul carrello dalla molla tesa è diretta verso sinistra. b) Nella posizione di equilibrio il valore assoluto della velocità del carrello è massimo e la forza della molla è nulla. c) Quando lo spostamento a sinistra è massimo, la velocità è nulla e la forza esercitata dalla molla compressa, diretta verso destra, è massima. d) Nella posizione di equilibrio il valore assoluto della velocità del carrello è massimo e la forza della molla è nulla. e) Il carrello ha compiuto una oscillazione completa e ha inizio un nuovo ciclo.
(Adattare da Walker, vol. 1, pag 390, sostituendo le scritte A con s_o, la scritta x con s)

1.2 Velocità, accelerazione e forza di richiamo di un moto armonico
Ci occupiamo ora della velocità e dell'accelerazione di un moto armonico che si svolge su una traiettoria rettilinea. Facciamo subito delle considerazioni qualitative, esaminando il grafico di figura 4 e ricordando le definizioni di velocità e di accelerazione. Il valore assoluto della velocità è evidentemente massimo quando lo spostamento varia nel tempo più rapidamente, come avviene agli istanti in cui esso si annulla: più precisamente la velocità ha un massimo negativo quando lo spostamento passa da valori positivi a negativi (per t = T/4), un massimo positivo nel caso opposto (t = 3T/4). La velocità, d'altra parte, si annulla quando lo spostamento non varia nel tempo, ciò che si verifica in corrispondenza dei massimi (t = 0) e dei minimi (t = T/2) del grafico. Allo stesso modo, il valore assoluto dell'accelerazione è massima agli istanti in cui la velocità si annulla, mentre si annulla quando la velocità è massima. E quindi, ragionando in valori assoluti, l'accelerazione è massima quando lo spostamento è massimo, e si annulla quando si annulla lo spostamento.

I risultati di queste osservazioni sono in accordo con i risultati dei calcoli svolti utilizzando le espressioni esatte della velocità

(5) $$v(t) = v_o \text{ sen } \omega t \quad ; \quad v_o = \omega s_o$$

e dell'accelerazione

(6) $$a(t) = -a_o \cos \omega t \quad ; \quad a_o = \omega^2 s_o$$

del moto armonico descritto dalla legge (1): $s(t) = s_o \cos \omega t$.

Negli Approfondimenti che seguono proponiamo due metodi diversi per ricavare le espressioni (5) e (6): uno basato sul collegamento fra moto circolare uniforme e moto armonico, l'altro basato sull'impiego delle derivate, argomento che tuttavia non avete ancora affrontato nel corso di Matematica.

Approfondimento 2. Ricaviamo un moto armonico da un moto circolare uniforme.
Il piatto del giradischi in figura A ruota con velocità angolare costante, di modulo $\omega = 2\pi/T$. Nel caso di un giradischi a 33 giri, che in realtà sono 33 e 1/3 giri/minuto, si ha f = 33,33/60 = 0,556 Hz e quindi ω = 3,49 rad/s. Il bullone posto sul piatto si muove a sua volta di moto circolare uniforme. E quindi (→ Tomo I, pag. xxx) la sua posizione angolare segue la legge

(A) $$\theta = \omega t$$

assumendo che all'istante t = 0 esso passi per la posizione angolare $\theta = 0$.
Ora a noi non interessa il bullone, ma la sua ombra sullo schermo, cioè la sua proiezione sull'asse s dove si svolge appunto la traiettoria dell'ombra. Questa proiezione (→ Figura B a)) cade evidentemente nel punto

(B) $$s(t) = r \cos \theta = r \cos \omega t$$

dove r è la distanza del bullone dal centro del piatto, mostrando così, per confronto con la legge (1), che il moto dell'ombra del bullone è un moto armonico con spostamento massimo $s_o = r$.

Anche la velocità e l'accelerazione dell'ombra si possono ottenere allo stesso modo. Cioè stabilendo modulo, direzione e verso di questi vettori per il moto del bullone quando esso si trova nella generica posizione angolare $\theta = \omega t$ e ricavandone poi le proiezioni sulla traiettoria dell'ombra. La velocità del bullone è diretta secondo la tangente alla traiettoria circolare con modulo $v_o = \omega r$. La sua proiezione sull'asse s, che rappresenta la velocità dell'ombra, come è mostrato nella parte b) della figura B, è:

(C) $$v(t) = v_o \text{ sen } \theta = \omega r \text{ sen } \omega t$$

cioè segue una legge identica alla (5) con velocità massima $v_o = \omega r$.

Sappiamo poi che l'accelerazione di un moto circolare uniforme è *centripeta*, cioè diretta verso il centro della traiettoria con modulo $\omega^2 r$. La sua proiezione sull'asse s, che rappresenta l'accelerazione dell'ombra, è mostrata nella parte c) della figura B:

(D) $$a(t) = -a_o \text{ sen } \theta = -\omega^2 r \text{ sen } \omega t$$

cioè segue una legge identica alla (6) con accelerazione massima $a_o = \omega^2 r$.

Figura A. **Esperimento.** Appoggiate un grosso bullone di metallo sul bordo del piatto di un vecchio giradischi a 33 giri, che quando l'apparecchio è in funzione descriverà un moto circolare uniforme. Disponete poi un foglio di cartoncino bianco su un lato del giradischi e illuminate orizzontalmente dall'altro lato con una lampada posta a qualche metro di distanza. Osservate ora il moto dell'ombra del bullone sul foglio: una continua oscillazione avanti e indietro, più veloce al centro della traiettoria, più lenta vicino agli estremi, dove anzi l'ombra si arresta per un istante prima di cambiare il senso di marcia. Proprio come un moto armonico (tanto più esattamente quanto più distante è la sorgente di luce).
(Adattare da da Walker, vol. 1, pag 393: con una sola lampada, lontana; senza la massa e molla in alto; disegnando un solo piolo e la sua ombra proiettata sul foglio, con una freccetta orizzontale accanto all'ombre che ne indichi il verso di marcia, concorde con quello della freccia curva sul piatto)

Figura B. L'ombra sullo schermo del bullone in moto circolare uniforme è un moto armonico sull'asse s. La posizione, la velocità e l'accelerazione di questo moto si ottengono proiettando su questo asse la posizione, la velocità e l'accelerazione del bullone. In particolare, quando il bullone è nella posizione angolare θ, l'ombra si trova all'ascissa s = r cosθ (a), la velocità $\mathbf{v_o}$ del bullone è diretta tangenzialmente e la sua proiezione è $v = - v_o \text{ sen}\theta$ (b); l'accelerazione $\mathbf{a_o}$ del bullone è diretta verso il centro e la sua proiezione è $a = -a_o \cos\theta$ (c).
(Adattare da Walker, vol. 1, pag 394, 395 e 396, solo le parti A, sostituendo nelle scritte A con r, v con v_o, a con a_o; indicando in tutti e tre i disegni ω con una freccia curva a destra)

Approfondimento 3. Calcoliamo la velocità e l'accelerazione di un moto armonico utilizzando le derivate.
Ricordiamo innanzitutto le definizioni di velocità e di accelerazione istantanea come derivate rispetto al tempo rispettivamente dello spostamento e della velocità: $v = ds/dt$ e $a = dv/dt$, dove le derivate si ottengono dai corrispondenti rapporti incrementali, $v = \Delta s/\Delta t$ e $a = \Delta v/\Delta t$, quando gli intervalli di tempo Δt diventano piccolissimi.

Il nostro punto di partenza è la legge (1): $s(t) = s_o \cos \omega t$. La derivata ds/dt si calcola sapendo che la derivata del prodotto ($s_o \cos \omega t$) di una grandezza costante (s_o) per una grandezza variabile ($\cos \omega t$) è data dal prodotto della grandezza costante per la derivata della grandezza variabile. Calcoliamo quest'ultima nel nostro caso sapendo che se l'argomento del coseno è una generica variabile α allora la sua derivata rispetto a tale variabile è $d(\cos \alpha)/d\alpha = \alpha \text{ sen } \alpha$; e quindi, essendo $\alpha = \omega t$ (con ω costante e t variabile), si ha $d(\cos \omega t)dt = \omega \text{ sen } \omega t$. Otteniamo così la seguente espressione per la velocità del moto armonico:

(A) $$v(t) = ds/dt = d(s_o \cos \omega t)/dt = \omega\, s_o \text{ sen } \omega t$$

Procediamo allo stesso modo per calcolare l'accelerazione $a = dv/dt$, tenendo presente ora che se l'argomento del seno è una generica variabile α allora la sua derivata è $d(\text{sen } \alpha)/d\alpha = -\cos \alpha$. Otteniamo così:

(B) $$a(t) = dv/dt = d(\omega s_o \cos \omega t)/dt = -\omega^2\, s_o \cos \omega t$$

Esempio 4. Calcoliamo la velocità di una massa che oscilla appesa a una molla.
Una massa appesa a una molla oscilla secondo la verticale con ampiezza massima s_o = 10 cm e periodo T = 1,2 s. Vogliamo calcolare la velocità massima della massa.
Notiamo innanzitutto che in questo esempio la massa è soggetta a due forze: la forza peso e la forza elastica della molla. Ma solo quest'ultima interviene nel moto di oscillazione in quanto dipendente dallo spostamento e quindi variabile nel tempo; la forza peso è invece costante durante il moto e ha il solo effetto di provocare una deflessione statica della molla: cioè quanto occorre per creare una forza elastica costante che bilancila forza peso.
Per calcolare la velocità massima v_o della massa utilizziamo la formula (5): $v_o = \omega\, s_o$, dove la pulsazione ω si ottiene dal periodo utilizzando la formula (3): $\omega = 2\pi/T = 6{,}28/1{,}2 = 5{,}23$ rad/s.
Si ha pertanto $v_o = \omega\, s_o, = 5{,}23 \times 0{,}1 = 0{,}523$ m/s.

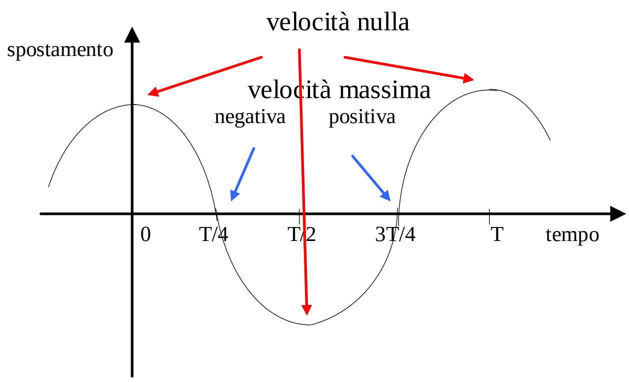


Figura 4. Esaminando il grafico dello spostamento sinusoidale di un moto armonico durante un periodo di oscillazione, si possono individuare gli istanti in cui la velocità si annulla (frecce rosse) e quelli in cui la velocità è massima (frecce blu).
(adattare lo schizzo disegnando correttamente la sinusoide e assegnando la lunghezza corretta agli intervalli di tempo)

Figura 5. Sul moto di oscillazione di una massa appesa a una molla la forza peso non ha alcun effetto. Si tratta infatti di un moto armonico del tutto analogo a quello del carrello considerato nella figura 3.
(da fare: una massa appesa a una molla appesa a sua volta a un sostegno fisso)

Ricaviamo ora una importante condizione a cui deve soddisfare la forza agente sulla massa di un oscillatore armonico. Il secondo principio della dinamica impone, a ogni istante, l'uguaglianza:

$$F(t) = m\, a(t)$$

dove l'accelerazione è data dalla formula (6). Si ha pertanto:

$$F(t) = -\, m\, \omega^2 s_o \cos \omega t$$

Ricordando che lo spostamento segue la legge $s(t) = s_o \cos \omega t$, ricaviamo la condizione:

(7) $$F(t) = -\, m\, \omega^2 s(t)$$

dove il prodotto $m\, \omega^2$ è una costante caratteristica dell'oscillatore. Concludiamo che *in un oscillatore armonico la forza di richiamo deve essere proporzionale allo spostamento e diretta in verso opposto ad esso*, come indica il segno negativo nell'espressione precedente. Ciò è verificato, come sappiamo, nel caso del sistema massa molla, dove la forza di richiamo, di natura elastica, segue appunto la legge $F = -k\, s$.

Il periodo di oscillazione di un sistema massa-molla
Quanto sopra permette di ricavare per il sistema massa-molla una importante relazione fra la pulsazione ω del moto armonico, la costante k della molla e la massa m. Uguagliando infatti la costante elastica k della molla alla costante che figura nell'espressione (7) della forza abbiamo:

$$k = m\, \omega^2$$

e quindi la pulsazione può essere espressa nella forma seguente

(8) $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da questa, utilizzando la (2), si ricava il periodo T del sistema massa-molla:

(9) $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Vediamo così che la durata del periodo di oscillazione aumenta all'aumentare della massa e diminuisce all'aumentare della costante elastica, cioè della rigidità della molla. Ciò è in accordo con la nostra intuizione, dato che l'inerzia associata alla massa tende evidentemente a rallentarne il movimento, mentre la rigidità della molla ha l'effetto opposto. La formula (9) mostra inoltre che il periodo dipende soltanto da m e k, e quindi non dipende da altre grandezze: in particolare, il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni, piccole o grandi che siano. Ciò è in disaccordo con la nostra intuizione, secondo cui spostamenti maggiori dovrebbero richiedere un tempo maggiore. Come si spiega ciò? Riflettendo sull'espressione della velocità del moto armonico, data dalla formula (5); questa mostra infatti che la velocità massima v_o del moto è direttamente proporzionale allo spostamento massimo s_o, e quindi ….

> E' proprio vero che il periodo di un sistema massa-molla non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni? La risposta è affermativa solo fintanto che la molla "si comporta bene", cioè segue la legge di Hooke, con proporzionalità esatta fra forza e spostamento. Ma sappiamo che questo non è rigorosamente vero quando gli spostamenti sono di grande ampiezza.

Esempio 5. Valutiamo la costante elastica di un grattacielo.
La cima di un grattacielo, quando soffia un forte vento, può subire oscillazioni di ampiezza relativamente grande (fino a qualche metro) con periodo tipicamente fra 4 e 8 secondi. Vogliamo

valutare la costante elastica di un grattacielo con periodo T = 6 s, assumendo che la massa equivalente della parte del grattacielo che oscilla sia m = 100 000 tonnellate, e calcolare la forza necessaria per deflettere di 1 mm la "molla" che rappresenta l'elasticità del grattacielo.

Ricaviamo la costante elastica dalla formula (9): $k = m/T^2 = 10^8/6^2 = 2{,}78\cdot 10^6$ N/m. Pertanto la forza per ottenere lo spostamento di 1 mm ha intensità: $F = kx = 2{,}78\cdot 10^6 \times 10^{-3} = 2{,}78\cdot 10^9$ N.

La relazione (9) è utilizzata in un particolare tipo di bilance, chiamate **bilance inerziali**, il cui principio di funzionamento è completamente diverso da quelli delle bilance usuali. In queste bilance si sfrutta un sistema massa-molla del quale si misura il periodo di oscillazione per ricavarne poi la massa. Un vantaggio evidente è che le bilance inerziali funzionano indipendentemente dalla gravità, e per questo sono usate per misurare la massa degli astronauti (→ figura 8). Ma si usano anche per misurare masse straordinariamente piccole.

La Fisica della tecnologia 1. Bilance inerziali e nasi elettronici.

Le bilance inerziali trovano impiego negli apparecchi, chiamati **nasi elettronici**, che sono usati per estendere o sostituire il senso dell'odorato. Noi percepiamo un odore quando le molecole di una sostanza aeriforme odorosa raggiungono delle particolari cellule, sulla superficie di una mucosa all'interno del naso, che funzionano come *sensori chimici*. Queste cellule rivelano la presenza delle molecole della sostanza odorosa, inviando quindi al cervello un segnale corrispondente, con sensibilità straordinaria, anche di una parte su un miliardo. I nasi elettronici utilizzano come sensori delle sostanze organiche che assorbono selettivamente sulla loro superficie l'una o l'altra delle diverse sostanze odorose che si vogliono rivelare. Quando le molecole vengono assorbite, la massa del sensore subisce un piccolissimo aumento, che è appunto ciò che viene misurato utilizzando bilance inerziali, *microbilance al quarzo,* estremamente sensibili: in grado di apprezzare variazioni di massa dell'ordine del picogrammo (10^{-15} kg). Queste bilance utilizzano un minuscolo cristallo di quarzo (lo stesso materiale usato negli orologi elettronici) del quale si misura la variazione della frequenza di oscillazione per determinare la variazione di massa dovuta alle sostanze assorbite sulla sua superficie.

I nasi elettronici trovano numerosi impieghi: per rivelare la presenza di esplosivi, sostanze tossiche e droghe, e per valutare la qualità di determinati prodotti, per esempio il caffè.

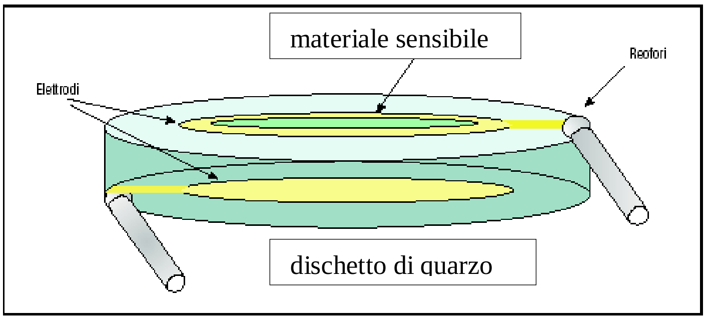


Figura A. Sulla superficie di un minuscolo dischetto di quarzo viene depositato un materiale sensibile che assorbe soltanto un determinato tipo di sostanze odorose. La variazione di massa viene rivelata misurando la variazione della frequenza di oscillazione del quarzo.
(adattare eliminando la scritta elettrodi e le due frecce corrispondenti, la scritta reofori e la freccia corrispondente, aggiungendo la scritta conduttori elettrici con frecce indirizzate ai due cilindretti sporgenti)

Figura 6. Il grattacielo Taipei 101 (Taipei, Taiwan, Cina) è attualmente il più alto edificio del mondo, con una altezza di 508 m, una sezione di 60 m × 60 m e un peso totale di circa 700 000 tonnellate. Le oscillazioni di questo grattacielo hanno un periodo di circa 6 secondi.

Figura 7. **Esperimento.** Una sbarretta metallica con un estremo fissato a un morsetto costituisce un sistema massa-molla, dove la massa è una opportuna frazione della massa della sbarretta (che rappresenta la parte che vibra e quanto essa vibra) e la molla è rappresentata dall'elasticità della sbarretta, che tende a raddrizzarla quando il suo estremo viene deflesso. Realizzate questo semplice apparato e ascoltate il suono emesso dalla sbarretta quando vibra. Attaccate poi una piccola massa addizionale all'estremo della sbarretta e fatela vibrare nuovamente: il tono risulterà più basso (cioè di frequenza minore ossia di periodo maggiore) a causa dell'aumento della massa, come previsto dalla formula (9).

(disegno da fare)

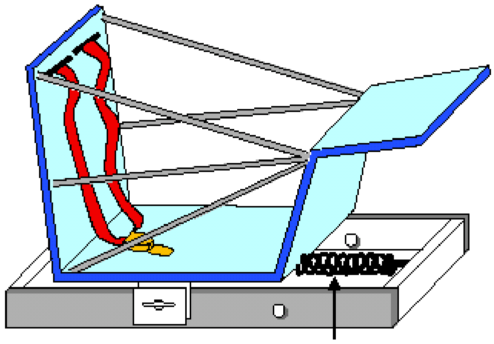


Figura 8. Il curioso trespolo in figura schematizza l'apparato usato dalla NASA per determinare il peso, più precisamente la massa, degli astronauti in condizioni di microgravità. Si tratta di un sistema massa-molla, dove la massa è quella dell'astronauta più quella della parte mobile del trespolo, e la molla è indicata dalla freccia in figura. La massa totale si ottiene misurando il periodo di oscillazione del sistema e utilizzando la formula (9)

1.3 Il pendolo

Accanto al sistema massa-molla, l'altro classico esempio di oscillatore armonico è costituito dal **pendolo**, che è ricordato per gli studi compiuti da Galileo, che ha trovato numerosi impieghi pratici, in particolare negli orologi, e che si presta agevolmente ad eseguire esperimenti per studiarne le proprietà. Come però vedremo, il pendolo non è un oscillatore armonico esatto, perché le sue oscillazioni seguono la legge sinusoidale soltanto approssimativamente, con approssimazione tanto migliore quanto minore è la loro ampiezza.

Di questo strumento esistono molte variazioni, ma noi qui consideriamo la più semplice: quella costituita da una massa m appesa a un sostegno attraverso un filo inestensibile di lunghezza L e di massa trascurabile, chiamata appunto *pendolo semplice*. La distanza della massa dal punto di sostegno è fissa, sicché la sua traiettoria, se si svolge in un piano verticale, è un arco di cerchio con centro nel sostegno. La figura 9 mostra che lo spostamento della massa nella sua traiettoria rispetto al punto di equilibrio è:

(10) $$s = L\,\theta$$

cioè lo spostamento s e l'angolo θ sono fra loro proporzionali.

Non è affatto detto che un pendolo oscilli davvero in un piano fisso, anche se non è difficile ottenerlo. Ma questa ipotesi semplifica tutto il resto. Sapreste discutere il caso generale?

Ora è evidente che la massa si trova in equilibrio soltanto quando si trova sulla verticale del sostegno, grazie all'equilibrio fra la forza peso, diretta verticalmente verso il basso, e la tensione **T** del filo che la sorregge, diretta verticalmente verso l'alto. Quando invece la massa si trova nella posizione indicata nella figura 9, cioè con il filo che forma un angolo θ rispetto alla verticale, la forza peso m**g** è ancora diretta verticalmente verso il basso, ma la tensione **T** del filo è diretta invece lungo il filo verso il sostegno, formando l'angolo θ rispetto alla verticale. E quindi la massa non è più in equilibrio. Se infatti spostiamo il pendolo dall'equilibrio e poi lo liberiamo, esso si mette a oscillare.

Per stabilire la forza che agisce sulla massa, decomponiamo la forza peso in una componente diretta secondo il filo (mg cosθ) e in una tangenziale alla traiettoria della massa (mg senθ). La prima è equilibrata dalla tensione del filo e perciò non ce ne occupiamo; la seconda è quella che agisce sulla massa per riportarla verso la posizione di equilibrio, con intensità:

$$F = -mg \operatorname{sen} \theta$$

dove il segno negativo sta a indicare che la forza è diretta in senso opposto allo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Esaminando questa formula notiamo che la forza di richiamo non è proporzionale all'angolo θ e quindi allo spostamento s della massa, come si richiede per un oscillatore armonico, ma al seno dell'angolo, cioè, utilizzando la (10), a sen (s/L). La proporzionalità desiderata in realtà si recupera, sebbene soltanto approssimativamente, per piccoli spostamenti, cioè per piccoli angoli. Infatti in tal caso, come è mostrato nella figura 10, si ha sen θ ≈ θ, e quindi possiamo scrivere

(11) $$F = -\,m\,g \operatorname{sen} \theta \approx -\,m\,g\,\theta = -m\,g\,s/L$$

Ora questa è la stessa espressione della forza elastica (F = -ks) del sistema massa-molla se si pone

$$k = mg/L$$

Ma se la massa del pendolo, come quella del sistema massa-molla, è soggetta a una forza di intensità proporzionale allo spostamento, allora si muove di moto armonico. Il periodo di oscillazione si ottiene immediatamente sostituendo k = mg/L nelle formula (9) e semplificando:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(mg/L)}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{12}$$

Questa è la legge del pendolo, che stabilisce che ***il periodo dipende dalla accelerazione di gravità g e dalla lunghezza L del pendolo, ma non dalla sua massa***. Ci si chiede, naturalmente, che fine abbia fatto la massa del pendolo, che certamente interviene nel suo moto sia in termini di inerzia sia come ingrediente essenziale della forza peso. Il fatto è che questi interventi si cancellano l'un l'altro, per lo stesso motivo per cui qualsiasi corpo in caduta libera è soggetto alla stessa accelerazione (l'accelerazione di gravità). Ciò perché la forza peso (m**g**) di un corpo è proporzionale alla sua massa e quindi, per la seconda legge della dinamica (**F** = m**a**), l'accelerazione in caduta libera è semplicemente **g**, indipendentemente dalla sua massa.

Se non possiamo usare le oscillazioni di un pendolo per misurarne la massa possiamo però usarle per misurare l'accelerazione di gravità. Su questo principio, più precisamente sulla misura del periodo T di un pendolo di lunghezza L nota, si basano infatti i *gravimetri*, che utilizzano la formula (12) per determinare il valore di g in vari luoghi della Terra e a diverse quote:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \tag{13}$$

Esempio 6. Calcoliamo il periodo del pendolo di Foucalt.
Vogliamo calcolare il periodo, la frequenza e la pulsazione del pendolo usato da Foucault per dimostrare la rotazione della Terra (→ Approfondimento 5).
Assumendo g = 9,8 m/s^2 ed essendo L = 67 m la lunghezza del pendolo, dalla formula (12) si ha:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 6,28\sqrt{\frac{67}{9,8}} = 16,42\,s$. E quindi la frequenza del suo moto è: f = 1/T = 1/16,42 =0,0609 Hz; la pulsazione: ω = 2π f = 0,3826 rad/s.

Esempio 7. Calcoliamo la lunghezza di un pendolo con periodo di 1 s.
Per calcolare la lunghezza di un pendolo che oscilla con periodo T = 1 s, utilizziamo la formula (12) scritta nella forma seguente:

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,8}{4\times 3,14^2} = 0,248\,m = 24,8\,cm$$

Esempio 8. Calcoliamo l'errore di un orologio a pendolo dovuto alle variazioni di temperatura.
Vogliamo calcolare l'errore di tempo che si accumula durante 1 giorno quando un pendolo di acciaio usato come orologio si trova a una temperatura 20°C maggiore di quella alla quale la sua lunghezza corrisponde esattamente al periodo di 1 s, sapendo che il coefficiente di dilatazione termica dell'acciaio è $\lambda = 11\cdot 10^{-6}$ °C^{-1}.
Chiamiamo L la lunghezza del pendolo quando esso si trova alla temperatura per cui il periodo è T = 1 s, e chiamiamo L' la sua lunghezza quando viene riscaldato di Δt = 20°C e conseguentemente il

periodo diventa T'. Si ha pertanto: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ e $T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$. Dividendo membro a membro la seconda espressione per la prima e poi semplificando si ricava: $T' = T\sqrt{\frac{L'}{L}}$. Ricordando la legge della dilatazione termica (Tomo II, Unità 1, pag. xx) si ha poi: L' = L(1 + $\lambda\Delta$t) = L(1 + $11 \cdot 10^{-6} \times 20$) = 1,00022 L. L'errore sul periodo è dunque $T' - T = T\sqrt{\frac{L'}{L}} - T = T\left(\sqrt{1{,}00022} - 1\right) = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\ s$.
Questo errore è relativamente piccolo, ma è ben apprezzabile l'errore di tempo che l'orologio a pendolo accumula durante un giorno: (T'-T)×86400=$1{,}1 \cdot 10^{-4} \times 86400$ = 9,5 s.

Collegamento con la storia 1. Galileo e la legge del pendolo.
La tradizione vuole che Galileo Galilei, mentre si trovava nel duomo di Pisa, prendesse a osservare il dondolio di un lampadario, e rimanesse colpito dal fatto che la durata delle oscillazioni appariva la stessa anche quando la loro ampiezza diminuiva. Per rendere quantitativa questa osservazione, non essendovi all'epoca cronometri, Galileo misurò la durata delle oscillazioni del lampadario con un orologio naturale, cioè il suo battito cardiaco (a quel tempo egli era uno studente di Medicina), confermando così che il periodo delle oscillazioni era indipendente dalla loro ampiezza, cioè il cosidetto *isocronismo* delle oscillazioni di un pendolo.

E' certo comunque che Galileo svolse una serie di esperimenti sul pendolo arrivando così a stabilire l'essenza della legge che conosciamo oggi (→ formula (12)) attraverso le seguenti conclusioni, che troviamo nei suoi scritti (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*):

- il periodo del pendolo dipende dalla lunghezza del filo di sospensione
(Quanto poi alla proporzione de i tempi delle vibrazioni di mobili pendenti da fila di differente lunghezza, sono essi tempi in proporzione suddupla delle lunghezze delle fila, o vogliam dire le lunghezze … son come i quadrati de i tempi)

- il periodo del pendolo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni
(… con tutto ciò tutte le vibrazioni, grandi e piccole, si fanno sotto tempi eguali tra di loro …)

- il periodo del pendolo non dipende dalla massa del corpo sospeso
(… ho preso due palle, una di piombo ed una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciascheduna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali, lunghi quattro o cinque braccia, legati ad alto … e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate, hanno sensibilmente mostrato, come la grave va talmente sotto il tempo della leggiera, che né in cento vibrazioni, né in mille, anticipa il tempo d'un minimo momento, ma camminano con passo egualissimo)

Non risulta invece che Galileo abbia usato un pendolo come orologio. Ciò si deve invece al fisico olandese Christiaan Huygens, che nel 1659 realizzò appunto il primo *orologio a pendolo*, assai più preciso degli altri tipi di orologi disponibili al tempo.

Figura A. Immagine di Galileo se non ne figurano altre in pagine precedenti

Approfondimento 4. Massa inerziale e massa gravitazionale.
Per ricavare la formula (12) abbiamo semplificato la massa, che figurava, sotto radice, sia al numeratore che al denominatore. In realtà le due masse, che abbiamo supposto identiche, rappresentano due proprietà diverse, almeno in linea di principio. La massa al numeratore, infatti, rappresenta l'**inerzia** del pendolo, cioè la sua opposizione al cambiamento del moto (*seconda legge della dinamica),* che possiamo chiamare **massa inerziale**, indicandola con m_{in}. La massa al denominatore, proveniente dalla formula (11), rappresenta invece la **massa gravitazionale** del pendolo, che possiamo indicare con m_{grav}, cioè l'interazione gravitazionale con altri oggetti (*legge*

di gravitazione universale → Tomo I, pag. xxx), che dunque non ha nulla a che fare con l'inerzia.

Assumendo che le due masse siano diverse, dovremmo allora scrivere il periodo del pendolo nella forma: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{in}L}{m_{grav}g}}$. Ma i risultati di tutti gli esperimenti svolti finora indicano, con accuratezza sino a 1 parte su 10^{12}, che il periodo di un pendolo non dipende dalla sua massa e che quindi $m_{in} = m_{grav}$. L'asserzione dell'uguaglianza fra massa inerziale e massa gravitazionale, chiamata *Principio di equivalenza*, rappresenta anzi il punto di partenza della teoria della Relatività generale di Einstein (→ Tomo V, pag. …). Che non è soltanto una teoria fisica raffinatissima, ma è anche ricca di ricadute pratiche, come i sistemi di posizionamento globale (GPS) largamente impiegati oggi.

Approfondimento 5. Il pendolo di Foucault e la rotazione della Terra.

Nel 1851 il fisico francese Lèon Foucault (1819-1696) utilizzò un pendolo per dimostrare che la Terra ruota effettivamente attorno al suo asse. Egli utilizzò una sfera di metallo di 28 kg, che sospese con un filo d'acciaio di 67 metri alla volta del Pantheon di Parigi. La sfera era munita di una punta, che durante ciascuna oscillazione lasciava la sua traccia su uno strato di sabbia disposto sul pavimento. Al passare delle ore si osserva che la traccia ruota gradualmente, indicando una corrispondente rotazione del piano di oscillazione del pendolo.

Il principio di funzionamento è analogo a quello dell'esperimento descritto nella figura A: per il principio d'inerzia, il pendolo mantiene il suo moto nello stesso piano. Se la Terra ruota, e con essa l'edificio che lo sorregge, il piano di oscillazione del pendolo deve ruotare continuamente rispetto alla Terra e quindi rispetto all'edificio dove si trova. Si capisce facilmente che se il pendolo si trovasse al polo Nord o Sud, la rotazione sarebbe quella della Terra attorno al suo asse, cioè di 360 gradi durante le 23 ore e 56 minuti del giorno siderale (con modulo della velocità angolare $\omega_T = 2\pi/23^h56^m = 7{,}29\cdot10^{-5}$ rad/s), mentre all'Equatore non si avrebbe alcuna rotazione. E' meno ovvio, invece, stabilire cosa avviene quando il pendolo si trova a una data latitudine α. Il modo più semplice per arrivarci è considerare la rotazione attorno alla verticale locale, la cui velocità angolare è la proiezione sulla verticale locale della velocità angolare (vettoriale) terrestre, per cui si ha: $\omega = \omega_T$ sen α. E quindi il periodo di rotazione locale è $T = 23^h56^m/\text{sen}\ \alpha$. A Roma, per esempio, la latitudine è circa $\alpha = 42°$ e pertanto $T = 23^h56^m/0{,}669 = 35{,}77$ ore.

figura A **Esperimento.** Sospendete un oggetto a un filo, sostenendo l'altro estremo con una mano. Ponete in oscillazione il pendolo, in modo che la sua traiettoria si svolga in un piano. Poi ruotate la mano senza spostare il punto di sospensione. Nonostante la rotazione del supporto il pendolo continuerà a oscillare nello stesso piano di prima. E lo stesso avverrebbe, si capisce, se a ruotare fosse tutto l'ambiente anziché soltanto il punto che sorregge il pendolo. (disegno da fare)

Figura B. Immagine del pendolo al Pantheon di Parigi da trovare con dida appropriata. A cui aggiungere: Vi sono in Italia varie realizzazioni del pendolo di Foucault; una di queste si trova nell'edificio Marconi del Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma La Sapienza.

L'energia di un oscillatore armonico

Anche nelle oscillazioni di un pendolo, come in quelle del sistema massa-molla, si hanno scambi continui fra due forme di energia, cinetica e potenziale; ma in questo caso fra energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale, anziché elastica. E anche qui abbiamo scambio totale fra le due forme di energia. Infatti quando l'oggetto sospeso, nella sua traiettoria, raggiunge la massima altezza h_o rispetto al punto di equilibrio, e per un istante si arresta, il sistema possiede soltanto l'energia potenziale $U_o = mgh_o$. Mentre quando esso passa attraverso il punto di equilibrio con velocità v_o il sistema possiede soltanto l'energia cinetica $K_o = ½\, mv_o^2$. Queste energie sono evidentemente uguali fra loro e pari all'energia totale E posseduta dal pendolo a un istante qualsiasi:

(14) $$E = U + T = mgh + ½ mv^2 = mgh_o = ½ mv_o^2$$

Possiamo esprimere l’energia totale del pendolo, come di qualsiasi altro oscillatore armonico meccanico, in termini dell’ampiezza massima di oscillazione, cioè dello spostamento massimo s_o della massa sulla sua traiettoria. La velocità massima v_o di un moto armonico è infatti legata allo spostamento massimo s_o dalla relazione $v_o = \omega s_o$ (→ formula (5)). Sostituendo nella (14) si ha pertanto:

(15) $$E = ½ m \omega^2 s_o^2$$

cioè *l’energia totale di un oscillatore armonico è direttamente proporzionale alla massa oscillante, al quadrato della pulsazione e al quadrato dell’ampiezza massima di oscillazione*.

Figura 9. Le frecce rosse indicano le forze agenti sulla massa del pendolo (tensione **T** del filo e forza peso m**g**), quando la massa è spostata di un angolo θ rispetto alla verticale. La forza peso viene decomposta in una componente (mg sen θ, freccia blu) diretta secondo il filo, e quindi equilibrata dalla tensione **T**, e in una componente (mg cos θ, freccia blu) tangente alla traiettoria, che richiama la massa verso il punto di equilibrio.
(Adattare da Walker, Fisica, Vol. I, pag. 407: cambiando i colori delle frecce come in dida, modificando le scritte come segue: mg sen θ, mg cos θ = T; unendo con un tratteggio le punte delle frecce blu con quella della freccia rossa m**g**; eliminando le due lineette a destra della linea verticale tratteggiata)

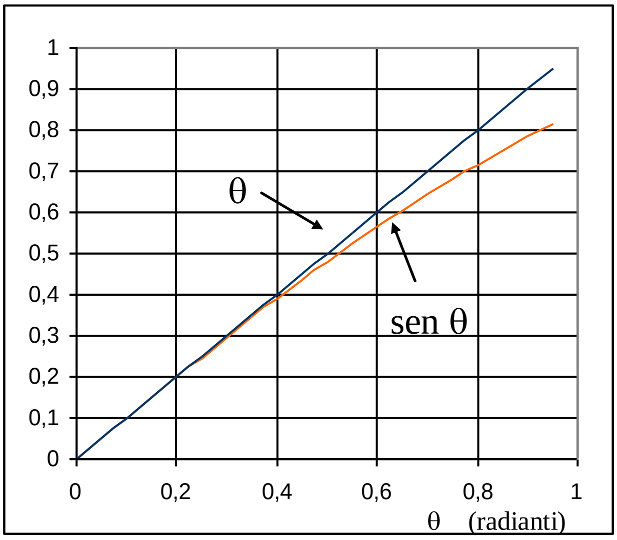


Figura 10. Il grafico mostra che per piccoli angoli il seno di θ (curva rossa) è approssimativamente uguale a θ (curva blu). In particolare, lo scarto relativo fra le due grandezze (cioè (θ - sen θ)/θ) si mantiene inferiore all’1% fintanto che θ < 0,25 rad = 14,3 gradi.

Figura 11. Quando l’oggetto sospeso si trova nei punti più alti della sua traiettoria l’energia cinetica è nulla e l’energia potenziale è massima ($U = m g h_o$). L’opposto avviene quando l’oggetto attraversa il punto di minimo della sua traiettoria, dove l’energia potenziale è nulla ed è massima quella cinetica ($T = ½ m v_o^2$).
(da fare: pendolo con pallina che oscilla, raggiungendo l’altezza h_o (da indicare) rispetto al punto più basso, e passando attraverso il punto più basso con velocità $\mathbf{v_o}$ (da indicare con una scritta e con una freccia))

1.4 Lo smorzamento di un oscillatore armonico

Qualsiasi pendolo, come è ben noto, oscilla con ampiezze via via decrescenti fino poi ad arrestarsi del tutto. E lo stesso avviene per le oscillazioni libere di un sistema massa-molla o di qualsiasi altro sistema analogo. Ciò è dovuto all’azione delle forze di attrito, che provocano gradualmente la dissipazione dell’energia posseduta inizialmente dall’oscillatore.

Il moto di un pendolo, per esempio, è frenato dalla resistenza dell’aria e lo stesso avviene per le vibrazioni di un diapason; il moto di un carrello collegato a una molla, dalla resistenza al rotolamento, dagli attriti interni della molla e da altri effetti dissipativi. Questi effetti, come sappiamo, sono sempre presenti. Sicché in pratica il moto non è periodico in senso stretto, ma *pseudoperiodico*, nel senso che le oscillazioni si ripetono periodicamente, ma non sono uguali fra loro perchè di ampiezza sempre minore.

In molti casi le forze frenanti, opposte al moto, sono direttamente proporzionali alla velocità. E allora si osserva sperimentalmente, e si dimostra matematicamente, che l’energia totale del sistema, inizialmente pari a E_o, diminuisce nel tempo con la legge esponenziale

(16) $$E(t) = E_o e^{-2t/\tau}$$

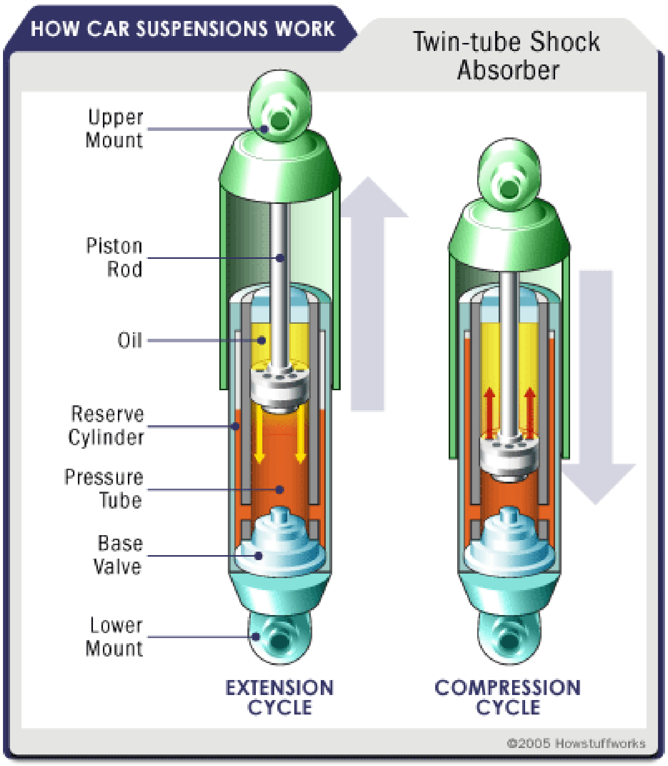
mentre l'ampiezza delle oscillazioni, che inizialmente è s_o, segue la legge

(17) $$s(t) = s_o\, e^{-t/\tau} \cos \omega t$$

Nelle formule precedenti interviene la grandezza τ, chiamata **costante di tempo,** che ha le dimensioni di un tempo e che determina la scala di tempo del decadimento delle oscillazioni: a valori grandi di τ corrisponde uno smorzamento lento; a valori piccoli, uno rapido (→ figura 12). Più precisamente, dopo un tempo $t = \tau$, l'ampiezza dell'oscillazione si riduce a $e^{-1} = 1/e = 0{,}368$ rispetto al valore iniziale. Il valore della costante di tempo dipende dall'entità delle forze frenanti che agiscono sul moto, a cui è inversamente proporzionale: nel caso ideale di assenza di queste forze, infatti, τ assume valore infinito, l'energia si conserva e il moto dell'oscillatore torna a essere esattamente periodico.

Esempio 9. Calcoliamo il tempo perché l'ampiezza delle oscillazioni si riduca di un fattore 10.
Vogliamo calcolare il tempo necessario perché l'ampiezza di una oscillazione smorzata con costante di tempo $\tau = 20$ s e periodo $T = 2$ s si riduca di un fattore 10, calcolando anche dopo quante costanti di tempo e quanti periodi di oscillazione ciò avviene.
Per calcolare il tempo utilizziamo la formula (17) scritta nella forma $s(t)/s_o = e^{-t/\tau} = 1/10$, dove abbiamo trascurato il termine oscillante. Prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri abbiamo: $-t/\tau = \ln(0{,}1)$, da cui ricaviamo $t = -\tau \ln(0{,}1) = -20\times(-2{,}30) = 46$ s. Cioè devono trascorrere $46/20 = 2{,}3$ costanti di tempo, ovvero $46/2 = 23$ periodi di oscillazione.

La Fisica attorno a noi 1. Le sospensioni di un'automobile.
In alcuni casi pratici è necessario che le oscillazioni vengano fortemente smorzate. E allora si utilizzano dispositivi chiamati **smorzatori**, che introducono appunto una forza frenante. Per far ciò si può usare un cilindro riempito di olio minerale, nel quale può scorrere un pistone dotato di forellini, come mostrato nella figura A. Quando il pistone si sposta, l'olio è costretto a passare attraverso i fori e quindi esercita una forza resistente, dovuta alla sua viscosità, di intensità proporzionale alla velocità del moto dell'olio, cioè del pistone.



Dispositivi di questo tipo sono utilizzati nelle sospensioni elastiche delle automobili, il cui scopo è quello di evitare che le irregolarità del piano stradale si riflettano in bruschi sobbalzi del corpo della vettura e quindi dei viaggiatori. Il sistema di sospensione può essere schematizzato come una massa (l'automobile) sorretta da una molla il cui estremo inferiore poggia sugli assi delle ruote.

Quando la vettura è in marcia, le irregolarità della strada provocano un moto verticale del sistema, che viene in gran parte assorbito dall'elasticità delle sospensioni (fatte con molle elicoidali o di altro tipo). Dopo ogni sobbalzo, tuttavia, il sistema massa molla continuerebbe ad oscillare per un certo tempo, assai fastidiosamente per i viaggiatori: qui intervengono gli smorzatori, che dissipano rapidamente l'energia del sistema riducendo così l'entità delle oscillazioni.

Figura A. Un tipico smorzatore usato nelle sospensioni di un'automobile è costituito da un cilindro contenente olio dove scorre un pistone forato. Quando lo smorzatore subisce allungamento, l'olio passa dalla parte superiore del cilindro a quella inferiore; viceversa quando esso subisce accorciamento. Tale dispositivo esercita una considerevole forza frenante, proporzionale alla velocità del moto relativo fra i suoi estremi.

(adattare dalla figura semplificando molto, solo uno dei due oggetti, indicando con lo stesso colore l'olio sopra e sotto il pistone, ma con colore diverso il flusso dell'olio attraverso i fori del pistone)

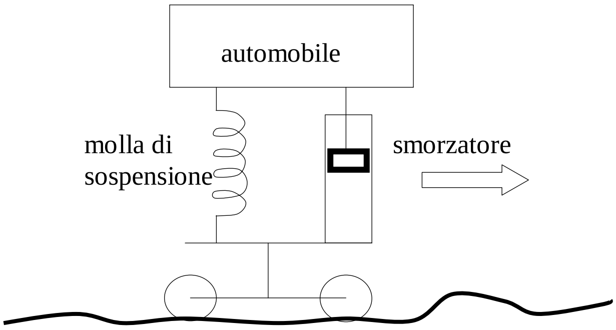


Figura B. Schema semplificato del sistema di sospensione di una automobile, costituito da una massa (il corpo della vettura) sorretta da una molla (la parte elastica delle sospensioni) e da uno smorzatore. L'elasticità e lo smorzamento del supporto riducono le oscillazioni del corpo della vettura quando, durante la marcia della vettura, le ruote sono soggette a un moto irregolare secondo la verticale.

1.5 L'oscillatore armonico forzato e la risonanza

Esperimento 1. La risposta di un oscillatore armonico eccitato periodicamente dipende dalla frequenza dell'eccitazione.

Sospendete un piccolo oggetto pesante a un estremo di un elastico sorreggendo con una mano l'altro estremo. Misurate il periodo T_o di oscillazione naturale del sistema e calcolate la corrispondente frequenza $f_o = 1/T$. Attendete che l'oggetto si trovi in quiete, e poi spostatene su e giù con moto regolare il punto di sospensione variando *molto lentamente* la frequenza di questo moto. Quando la frequenza è relativamente elevata (cioè $f >> f_o$), osserverete che l'oggetto sospeso resta in quiete o si sposta appena apprezzabilmente. Quando la frequenza diventa prossima a quella naturale (cioè $f \approx f_o$), l'oggetto si sposterà verticalmente con oscillazioni di grande ampiezza, anche maggiori di quelle del punto di sospensione. A frequenze decisamente più basse (cioè $f << f_o$), osserverete infine che il corpo sospeso segue semplicemente il moto del punto di sospensione.

Figura 13. L'ampiezza delle oscillazioni del corpo sospeso dipendono fortemente dalla frequenza con cui si sposta il punto di sospensione.
(da fare: mano che regge un qualsiasi corpo sospeso a un elastico, che oscilla verticalmente)

Il sistema considerato nell'Esperimento precedente, un oscillatore armonico soggetto a una forza esterna che ne determina il moto, è un esempio di **oscillatore forzato**: un argomento di notevole interesse per la sua generalità, dato che si presenta in molti campi della Fisica.

I risultati dell'esperimento si spiegano qualitativamente come segue, considerando come eccitazione dell'oscillatore massa-molla la forza esterna di frequenza variabile che ne sposta il punto di sospensione e come risposta del sistema le oscillazioni del corpo sospeso.. Quando la frequenza della forza esterna (che supponiamo periodica) è molto maggiore della frequenza naturale dell'oscillatore, prevale l'inerzia della massa, che non riesce a seguire il moto di eccitazione perchè troppo rapido. E quindi la massa si muove molto poco, con oscillazioni di piccola ampiezza alla frequenza di eccitazione (resterebbe immobile, se la frequenza di eccitazione avesse valore infinito). Quando la frequenza della forza esterna coincide, approssimativamente, con quella del sistema, la forza esterna pompa periodicamente energia nell'oscillatore, le cui oscillazioni possono quindi crescere fino a grande ampiezza. Quando infine la frequenza esterna è molto bassa, la massa segue semplicemente le lente oscillazioni dell'eccitazione.

In generale, la risposta di un oscillatore a una forza esterna sinusoidale è costituita dalla somma di un termine *transitorio,* che si manifesta inizialmente e che poi decresce nel tempo fino ad annullarsi, e di un termine *permanente,* che si mantiene appunto permanentemente nel tempo (almeno finchè dura l'eccitazione). Quest'ultimo segue la legge sinusoidale alla stessa frequenza dell'eccitazione, ma con una ampiezza che dipende dalla frequenza forzante. Si dimostra che la risposta permanente di un oscillatore smorzato con pulsazione naturale ω_o e costante di tempo τ a una forza sinusoidale applicata alla massa di intensità massima F_o e pulsazione ω è data dall'espressione:

$$s_o(\omega) = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2/\tau^2}} \tag{18}$$

Esaminiamo subito qualche conseguenza di questa formula. A frequenze molto basse ($\omega << \omega_o$) si ha $s_o \approx F_o/m\,\omega_o^2$, cioè la risposta è costante e quindi non dipende dalla frequenza. A frequenze molto alte ($\omega >> \omega_o$) si ha $s_o \approx F_o/m\,\omega^2$, cioè la risposta è inversamente proporzionale al quadrato della frequenza. E tutto ciò è in accordo con le osservazioni dell'Esperimento 1.

L'andamento complessivo della funzione s_o in funzione della frequenza è rappresentato nella figura 14 per un oscillatore con ω_o = 0,5 rad/s. Il picco che si osserva quando la pulsazione di eccitazione assume valori nell'intorno di ω_o rappresenta il fenomeno della **risonanza**, che avevamo incontrato svolgendo l'Esperimento 1. Esaminando ancora l'espressione (18) si nota infatti che quando $\omega = \omega_o$ il primo dei due termini sotto radice si annulla e quindi l'ampiezza di oscillazione s_o assume un valore maggiore che alle altre frequenze. Tale ampiezza, inoltre, è direttamente proporzionale alla costante di tempo.

Il fenomeno della risonanza, del resto, è abbastanza comune. Sappiamo bene, per esempio che per portare in oscillazione un'altalena va usata una forza periodica, o anche una sequenza periodica di impulsi, con frequenza pari a quella propria dell'altalena stessa.

La Fisica attorno a noi 2. Le vibrazioni autoeccitate: i fischi e il crollo di ponti.

Una forza periodica, come sapete, può portare in oscillazione un sistema, provocando oscillazioni anche di grande ampiezza se la sua frequenza è prossima a quella naturale del sistema. A volte provocando effetti catastrofici, come quando il passaggio su un ponte di truppe in marcia con passo cadenzato ne provoca il crollo. Ciò avvenne più volte nel corso dell'Ottocento, sicchè da allora i regolamenti di tutti gli eserciti prevedono che la truppa, quando attraversa un ponte, debba "rompere il passo".

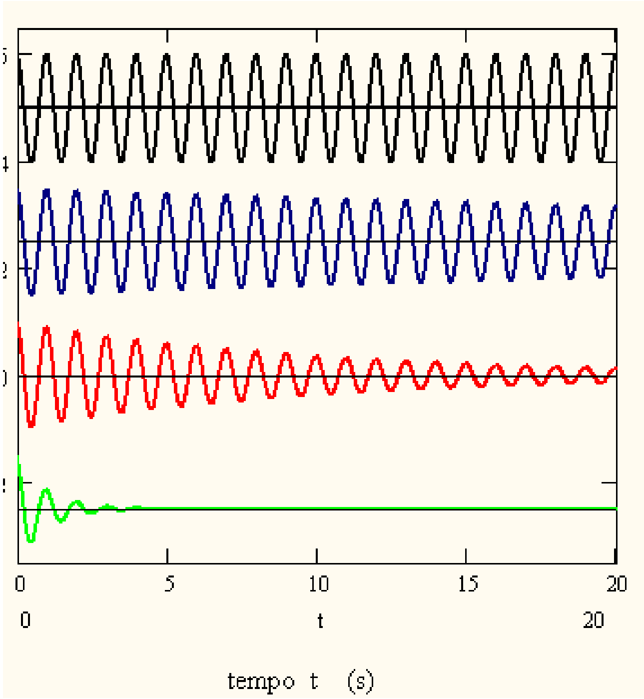
Ma anche una sorgente di energia non periodica può portare un sistema in oscillazione. Ciò avviene, per esempio, quando fischiamo. In tal caso noi aspiriamo un flusso d'aria che mette in vibrazione le nostre labbra producendo un suono. Il flusso d'aria, naturalmente, è tutt'altro che periodico, ma qualsiasi sua irregolarità provoca delle piccole vibrazioni che creano allora dei vortici i quali esercitano sul sistema una forza periodica alla frequenza di queste vibrazioni. A questo fenomeno, che prende il nome di **vibrazione autoeccitata** (una denominazione alquanto impropria, dato che nulla può vibrare senza una sorgente esterna di energia), si deve il funzionamento degli strumenti a fiato.

Le vibrazioni autoeccitate, tuttavia, possono anche provocare effetti assai indesiderati in macchinari e manufatti: vibrazioni od oscillazioni di ampiezza tale da superare i limiti di rottura dei materiali. Per restare nel tema dei crolli di ponti, si ricorda quello del ponte sospeso Tacoma Narrows (negli Stati Uniti), che presentava una marcata tendenza a oscillare attorno alla sua mezzeria, come mostra la foto nella parte a) della figura A. La mattina del 7 novembre 1940 soffiò a lungo un vento forte ma regolare (circa 65 km/h). Avvenne allora che le forze prodotte dai vortici creati dalla interazione fra il flusso dell'aria e le deboli oscillazioni del ponte (→ figura B) provocarono un aumento graduale di queste oscillazioni, fino a raggiungere, dopo alcune ore, ampiezze tali da provocare la rottura e il crollo della struttura. L'unica vittima fu un cane, dato che gli automobilisti di passaggio si erano allontanati dal ponte quando le sue lente oscillazioni erano diventate ben avvertibili. I criteri di progetto dei ponti, dopo questa vicenda, furono modificati per tener conto del fenomeno delle vibrazioni autoeccitate e infatti i numerosi ponti sospesi costruiti in seguito hanno dimostrato buone caratteristiche di stabilità.

Figura A. a) Il ponte sospeso Tacoma Narrows oscilla poco prima del crollo: un lato del ponte si solleva mentre l'altro si abbassa , con periodo di circa 5 s. b) Immagine ripresa durante il crollo.
(Fotografie da trovare, come quelle in Hecht, vol. I, pag. 369, in basso)

Figura B. Quando il ponte oscilla debolmente attorno alla sua mezzeria, il vento crea dei vortici che esercitano forze che si alternano con la stessa frequenza delle oscillazioni, aumentandone quindi gradualmente l'ampiezza.
(Adattare da Hecht, vol. I, pag. 369, fig. 10.33)

Figura 12. La curva nera in alto rappresenta le oscillazioni di un oscillatore armonico con periodo T = 1 s. Le altre curve rappresentano oscillazioni smorzate, con costanti di tempo rispettivamente di 50 s (debole smorzamento, curva blu), 10 s (curva rossa) e 1 s (forte smorzamento, curva verde).



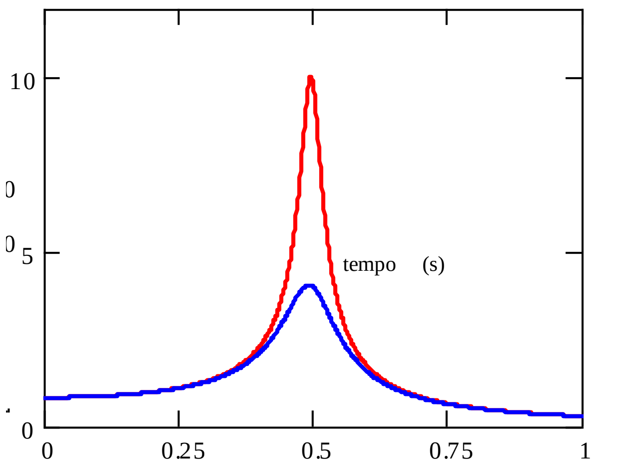


Figura 14. Il grafico rappresenta l'ampiezza massima di oscillazione s_o di una massa di 0,5 kg collegata a una molla, al variare della frequenza della forza ad essa applicata. La forza ha intensità massima F_o = 0,001 N; la pulsazione propria del sistema è ω = 0,5 rad/s. La curva rossa rappresenta il caso in cui la costante di tempo del sistema è τ = 50 s; quella blu, τ = 20 s.
(Aggiungere le seguenti scritte: sull'asse delle ordinate spostamento (cm), sull'asse delle ascisse pulsazione (rad/s)

Figura 15. Con quale legge va applicata la forza a un'altalena per portarla in forte oscillazione?
(Vignetta da fare)

1.6 Oscillazioni periodiche e teorema di Fourier

Perché ci siamo occupati finora soltanto di moti armonici, cioè di oscillazioni che seguono la legge sinusoidale, trascurando di considerare oscillazioni periodiche di altra forma? Il motivo sta in un importantissimo teorema dovuto al matematico e fisico francese Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), secondo il quale un moto periodico non armonico non è altro che una somma di moti armonici semplici. E quindi qualsiasi oscillazione periodica può essere ricondotta a oscillazioni armoniche.

Il **teorema di Fourier** stabilisce infatti che *qualsiasi funzione del tempo con periodo T può essere rappresentata come somma di termini sinusoidali di periodo T/n, dove n è un numero intero positivo*. In formula:

A rigore, non tutte le funzioni periodiche, ma soltanto quelle che soddisfano determinate condizioni. Che sono però soddisfatte in tutti i casi di interesse pratico.

$$f(t) = A_o + A_1 \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(2\pi\frac{2t}{T} + \varphi_2\right) + A_3 \cos\left(2\pi\frac{3t}{T} + \varphi_3\right) + \ldots \qquad (19)$$

dove A_o rappresenta il valor medio della funzione f(t), che di solito è nullo. I termini dipendenti dal tempo al secondo membro della (19) si chiamano *armoniche* della funzione f(t): la prima armonica, o *fondamentale,* ha periodo T e frequenza f=1/T, la seconda armonica ha periodo T/2 e frequenza f = 2/T, e così via.

Per rappresentare una generica funzione periodica f(t) occorre davvero considerare tutti gli infiniti termini della serie? In teoria sì, ma in pratica si ottiene una buona rappresentazione anche utilizzando un numero relativamente piccolo di armoniche. Il motivo è che, salvo casi particolari, le ampiezze dei coefficienti A_n diventano sempre più piccole al crescere di n.

Consideriamo, per esempio, il moto orizzontale (trascurando quindi la forza peso) di una pallina di ping pong fra le racchette di due giocatori che si trovano in posizioni fisse, supponendo che i successivi rimbalzi si svolgano sulla stessa traiettoria a velocità costante e quindi il moto sia periodico. La posizione della pallina sulla sua traiettoria in funzione del tempo è dunque descritta dall'onda triangolare in figura 15 (curva nera in basso) dato che, fra un urto e l'altro, si tratta di un moto uniforme.

Come ora sappiamo, l'onda triangolare è rappresentata dalla somma di una sinusoide di periodo T (curva blu in lato) e di infinite armoniche di periodo T/n, in questo caso soltanto quelle con n dispari, con ampiezza inversamente proporzionale a n^2. La figura 15 mostra cosa avviene aggiungendo alla fondamentale una armonica per volta, dall'alto verso il basso. Si osserva così che anche un numero relativamente piccolo di termini della serie (19) permette di rappresentare ragionevolmente bene la funzione.

Allo stesso modo, la sequenza di impulsi periodici che applichiamo a un'altalena per portarla in forte oscillazione, è costituita da una molteplicità di frequenze, fra le quali la fondamentale che coincide con la frequenza propria del sistema. Ed è questa che compie lavoro cedendo energia all'altalena.

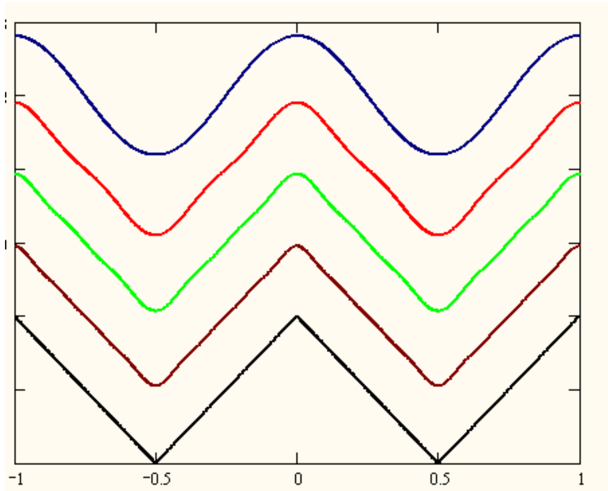


Figura 16. L'onda triangolare in basso (curva nera) rappresenta lo spostamento di una pallina di ping pong che si muove a velocità costante fra le racchette di due giocatori. Si tratta di un moto periodico (T = 1 s), che può quindi essere rappresentato come somma di infiniti moti armonici. Ma in realtà bastano già pochi termini della serie (19) per ottenere un buona approssimazione dell'onda triangolare. Ciò è mostrato dalle curve ottenute rappresentando un solo termine della serie (curva blu in alto), due termini (curva rossa), tre (curva verde), quattro (curva marrone).

Test di verifica

1) La pulsazione di un moto periodico si misura in

O hertz | O secondi | O radianti al secondo

2) Un moto periodico che si ripete esattamente ogni 2,5 s ha

O periodo di 0,4 Hz | O frequenza di 2,5 s | O pulsazione di 0,528 rad/s

3) Vero o falso?

	V	F
Tutte le oscillazioni sono periodiche	O	O
Tutte le oscillazioni periodiche seguono la legge sinusoidale	O	O
Una oscillazione che segue la legge oraria $x(t) = x_o$ sen ωt è un moto armonico	O	O
Una oscillazione che segue la legge oraria $x(t) = x_o \cos \omega t$ non è un moto armonico	O	O

4) La lama di una sega compie 13 oscillazioni complete in 17 secondi. La sua frequenza è:

O 0,765 Hz | O 13 Hz | O 1,31 Hz

5) Nel sistema massa-molla la forza di richiamo è

O direttamente proporzionale allo

O direttamente proporzionale al quadrato dello

O inversamente proporzionale allo

spostamento

6) Sottolineate gli errori che individuate nella frase seguente.

Nelle oscillazioni del sistema massa-molla si verificano scambi parziali fra energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale. L'energia cinetica è massima quando la massa si trova agli estremi della sua traiettoria.

7) A un dato istante, un carrello collegato a una molla si trova in quiete. Circa l'energia posseduta dal sistema,

O possiamo concludere che è nulla

O possiamo concludere che è stata dissipata in calore

O non possiamo concludere nulla

8) In un moto armonico la velocità è massima quando

O lo spostamento è massimo | O lo spostamento è nullo | O l'accelerazione è massima

9) L'estremità dell'antenna di un'auto oscilla con moto armonico alla frequenza f_o con spostamento massimo s_o. Pertanto la sua accelerazione massima è

O $4\pi^2 f^2 s_o^2$ | O $4\pi^2 f s_o^2$ | O $4\pi^2 f^2 s_o$

10) Il periodo di oscillazione di un sistema massa-molla

O è proporzionale alla | O è proporzionale alla radice quadrata della | O non dipende dalla

massa

11) Il periodo di oscillazione di un sistema massa-molla

O è proporzionale alla | O è proporzionale al quadrato della | O non dipende dalla

ampiezza delle oscillazioni

12) Completate la frase seguente

Le bilance inerziali sono costituite da un sistema massa-molla del quale si misura il periodo di oscillazione per ricavare il valore della massa. Il loro funzionamento non dipende dalla accelerazione di gravità.

13) La massa di un sistema massa-molla viene quadruplicata. Pertanto la frequenza di oscillazione del sistema

O si dimezza   O resta uguale   O si raddoppia

14) Un sistema massa-molla, a un dato istante, possiede 1,15 J di energia cinetica e 2,45 J di energia potenziale elastica. Quando il suo spostamento raggiunge il valore massimo, la sua energia potenziale elastica è

O 1,3 J   O 2,45 J   O 3,6 J

15) La forza di richiamo di un pendolo

O è esattamente proporzionale allo   O è approssimativamente proporzionale allo   O non dipende dallo spostamento

16) Vero o falso?

	V	F
Un pendolo può essere usato per misurare la massa dell'oggetto sospeso	O	O
Un pendolo può essere usato come orologio	O	O
Un pendolo può essere usato per misurare la lunghezza del filo di sospensione	O	O
Un pendolo può essere usato per misurare l'accelerazione di gravità	O	O
Un pendolo può essere usato per misurarne la costante elastica del filo di sospensione	O	O

17) Il periodo di oscillazione di un pendolo

O è proporzionale alla   O è proporzionale alla radice quadrata della   O non dipende dalla massa dell'oggetto sospeso.

18) Quadruplicando la lunghezza del filo di sospensione di un pendolo, il periodo di oscillazione

O si raddoppia   O si dimezza   O resta uguale

19) Aumentando la temperatura del filo metallico che sospende un pendolo, il periodo di oscillazione

O aumenta   O diminuisce   O resta invariato

20) A rigore, l'intensità della forza di richiamo che agisce sulla massa di un pendolo

O è maggiore di   O esattamente uguale a   O minore di

una direttamente proporzionale allo spostamento.

21) Portando un pendolo sulla Luna, il suo periodo di oscillazione

O aumenta   O diminuisce   O resta uguale

22) Il filo di sostegno dell'oggetto sospeso di un pendolo si rompe nell'istante in cui questo ha raggiunto un estremo della sua traiettoria. Esso pertanto cade

O percorrendo un arco di parabola   O secondo la verticale   O percorrendo un arco di ellisse

23) Il filo di sostegno dell'oggetto sospeso di un pendolo si rompe nell'istante in cui questo, oscillando, si trova nel punto più basso della sua traiettoria. Esso pertanto cade

O percorrendo un arco di parabola   O secondo la verticale   O percorrendo un arco di ellisse

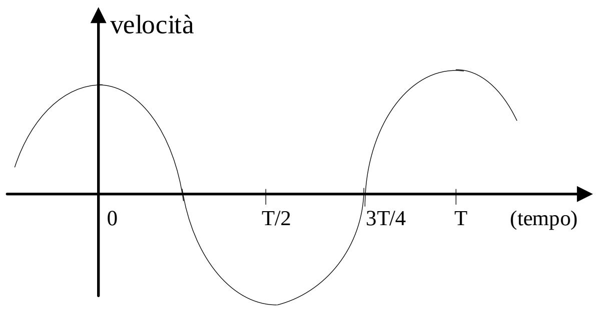
24) La massa m = 10 g di un oscillatore armonico vibra con spostamento massimo di 1 mm alla frequenza di 200 Hz. Pertanto l'energia dell'oscillatore è:

O $2{,}5\cdot10^{-3}$ J   O 0,025 J   O $7{,}89\cdot10^{-3}$ J

25) Il grafico rappresenta la velocità in funzione del tempo di un oscillatore massa-molla. L'accelerazione è massima all'istante

O t = 0   O t = T/2   O t = 3T/4

(aggiustare il grafico con una curva sinusoidale)



26) Il moto di un oscillatore armonico smorzato, cioè in presenza di attriti, è

O periodico   O pseudoperiodico   O esponenziale

27) In presenza di attriti, l'energia di un oscillatore diminuisce gradualmente con un dipendenza dal tempo di tipo

O esponenziale   O logaritmico   O quadratico

28) Vero o falso?

	V	F
Qualsiasi moto periodico può essere rappresentato come somma di moti armonici	O	O
Il fenomeno della risonanza produce spesso oscillazioni di grande ampiezza	O	O
Applicando a un oscillatore una forza periodica, esso oscillerà alla frequenza della forza anziché a quella propria	O	O
La costante di tempo di un oscillatore smorzato non dipende dallentità degli attriti	O	O

29) La costante di tempo di un oscillatore smorzato rappresenta il tempo necessario perché l'ampiezza delle oscillazioni si riduca di un fattore

O 2   O 2,72   O 10

30) L'ampiezza delle oscillazioni di un oscillatore smorzato con periodo T = 12 s si riduce del fattore e^2 dopo 10 periodi. Pertanto la costante di tempo dell'oscillatore è

O 60 s   O 6 s   O 120 s

31) Un pendolo viene eccitato da una forza sinusoidale di frequenza variabile, della quale si aggiusta a ogni frequenza l'intensità in modo che le oscillazioni abbiano sempre la medesima ampiezza. L'intensità della forza che viene applicata alla frequenza di risonanza del pendolo è

O maggiore di   O uguale a   O minore di

quella applicata alle altre frequenze.

32) Completate le frasi seguenti

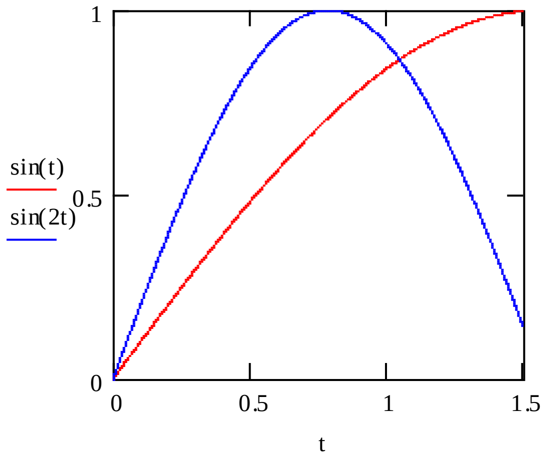
Il fenomeno della risonanza di manifesta quando la frequenza della forza applicata a un oscillatore è uguale o comunque assai prossima a quella propria dell'oscillatore stesso. In tal caso aumenta, a volte anche notevolmente, l'ampiezza delle oscillazioni.

Problemi e quesiti

1. Un oggetto si muove di moto armonico con spostamento, misurato in centimetri, $s(t) = 12 \cos(4\pi t)$. Calcolate il periodo T, la frequenza f e la pulsazione ω del moto. Calcolate lo spostamento ai seguenti istanti: $t_1 = 0$, $t_2 = T/4$, $t_3 = T/2$.

Risoluzione. Confrontando la legge oraria data con la formula (1) si conclude che la pulsazione è $\omega = 4\pi = 12{,}56$ rad/s. Applicando le formule (2) e (3) si ricavano il periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4\pi = 0{,}5$ s e la frequenza $f = 1/T = 2$ Hz.
Al tempo $t_1 = 0$ si ha: $s(t_1) = 12 \cos 0 = 12$ cm; al tempo $t_2 = T/4 = 0{,}125$ s si ha: $s(t_2) = 12 \cos(4\pi\times0{,}125) = 12 \cos(\pi/2) = 0$; al tempo $t_3 = 0{,}25$ si ha: $s(t_3) = 12 \cos \pi = -12$ cm.

2. Due palline A e B si muovono di moto armonico sulla stessa traiettoria, partendo dallo stesso punto allo stesso istante, con leggi: $s_A(t) = \text{sen } t$, $s_B(t) = \text{sen } 2t$. Ricavate graficamente il tempo t^* dell'istante al quale esse si incontrano e lo spostamento $s(t^*)$ a tale istante.



Risoluzione. Per risolvere il problema si tracciano per punti i grafici delle funzioni sen t e sen 2t. L'intersezione delle due curve individua il tempo t^* dell'istante al quale le palline si incontrano e lo spostamento a tale istante: $t^* = 1.047$ s; $s(t^*) = 0{,}866$ m.

3. Le forze elettriche esercitate sul fascetto di elettroni di un visore impiegante un tubo a raggi catodici lo spostano periodicamente in direzione sia verticale che orizzontale. Considerate separatamente, la forza che agisce orizzontalmente sposta il punto luminoso sullo schermo con la legge $x(t) = \cos \omega t$, quella che agisce verticalmente, con la legge $y(t) = \text{sen } \omega t$. Descrivete la traiettoria del punto luminoso quando le due forze agiscono contemporaneamente.

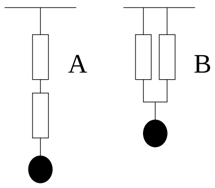
Risoluzione. A ogni istante, lo spostamento complessivo del punto luminoso, somma vettoriale dello spostamento orizzontale e di quello orizzontale, ha come coordinate cartesiane $x(t) = \cos \omega t$ e $y(t) = \text{sen } \omega t$. Il punto si muove cioè su un cerchio di raggio $r = \sqrt{(\cos^2(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t)} = 1$, con fase $\phi(t) = \text{arctang}(\text{sen}(\omega t)/\cos(\omega t)) = \omega t$, cioè con velocità angolare costante ω.

4. Un vagone di massa m = 20 tonnellate si muove alla velocità di 5 km/h verso i respingenti che si trovano al termine del binario. Quando il vagone li raggiunge, li schiaccia di 20 cm e poi riparte in direzione opposta. Stabilite la natura del moto del vagone nelle seguenti fasi: prima del contatto con i respingenti, durante il contatto e dopo il contatto, trascurando gli effetti degli attriti. Calcolate la costante elastica della molla costituita dai respingenti, l'energia massima in essa immagazzinata, il periodo del moto armonico.

Risoluzione. Trascurando gli attriti, il vagone procede con moto uniforme di velocità $v_o = 5$ km/h = (5000 m)/(3600 s) = 1,39 m/s fino al contatto con i respingenti. Durante il contatto con i respingenti si ha un sistema massa molla: il vagone prima trasferisce gradualmente la sua energia cinetica $T = ½ mv_o^2 = 0{,}5\times2\cdot10^4\times1{,}39^2 = 1{,}93\cdot10^4$ J ai respingenti, poi si arresta per un attimo e infine riparte in senso opposto, mosso dalle molle compresse che gli restituiscono l'energia iniziale. Dato che l'energia si conserva, il vagone, perso il contatto con i respingenti, si allontanerà poi con moto uniforme di velocità $v = -1{,}39$ m/s. Nella fase in cui il vagone è in contatto con i respingenti, esso si muove di moto armonico. La costante elastica dei respingenti si calcola sapendo che questi si schiacciano di $x_o = 20$ cm per assorbire l'energia cinetica T del vagone. Pertanto l'energia massima immagazzinata dai respingenti è: $U = ½ k x_o^2 = T$, da cui si ricava il valore della costante elastica: $k = 2T/x_o^2 = 2\times1{,}93\cdot10^4/0{,}2^2 = 9{,}65\cdot10^5$ N/m. Il periodo del moto armonico si calcola impiegando la formula (9): $T = \sqrt{(m/k)} = \sqrt{(2\cdot10^4/9{,}65\cdot10^5)} = 0{,}14$ s. Ma questo moto dura meno di un periodo.
(Vignetta di un vagone che va a urtare i respingenti della stazione)

5. Un oggetto di massa m = 10 kg viene appeso a un sostegno tramite una molla, che così si allunga di 10 cm. Calcolate il periodo del moto di oscillazione secondo la verticale di questo sistema. Calcolate l'energia del sistema e la velocità massima dell'oggetto sospeso quando l'ampiezza massima di oscillazione è di 2 cm.

Risoluzione. La costante elastica si calcola come rapporto fra la forza peso e l'allungamento statico della molla x = 10 cm: $k = mg/x = 9{,}8 \times 10/0{,}1 = 980$ N/m. Il periodo di oscillazione si calcola impiegando la formula (9): $T = \sqrt{(m/k)} = \sqrt{(10/980)} = 0{,}101$ s. L'energia totale E dell'oscillatore è uguale all'energia potenziale della molla agli istanti in cui lo spostamento (s_o = 2 cm) è massimo: $E = ½\ k\ s_o^2 = 0{,}5 \times 980 \times 0{,}02^2 = 0{,}196$ J, ed è anche uguale all'energia cinetica dell'oggetto sospeso quando esso attraversa il punto di equilibrio; $T = ½\ m\ v_o^2 = E$. Da cui si ricava pertanto la velocità massima: $v_o = \sqrt{(2T/m)} = \sqrt{(2 \times 0{,}196/10)} = 0{,}198$ m/s.



6. Un oggetto di massa m sospeso a un sostegno tramite una molla oscilla secondo la verticale con periodo T. Calcolate come si modifica il periodo quando alla molla se ne aggiunge una seconda, uguale alla prima, disposta rispettivamente come nelle parti A e B della figura.

Risoluzione. Se $F = -kx$ è la relazione che caratterizza la singola molla, quando due molle sono disposte come in A, lo spostamento si raddoppia a parità di forza. Cioè si ha $x_A = -2F/k$, da cui, posto $x_A = -F_A/k_A$, si ricava $k_A = k/2$. Quando invece esse sono disposte come in B, lo spostamento totale si dimezza a parità di forza totale. Cioè si ha $x_A = -F/2k$, da cui, posto $x_B = -F_B/k_B$, si ricava $k_B = 2k$. Pertanto, utilizzando la formula (9), si ha nei due casi: $T_A = \sqrt{(2m/k)} = T\sqrt{2}$; $T_B = \sqrt{2m/2k)} = T/\sqrt{2}$.

7. Calcolate l'energia cinetica e l'energia potenziale, in frazioni dell'energia totale, quando la massa di un oscillatore armonico si trova a metà del suo spostamento massimo. Calcolate la frazione dello spostamento massimo per cui l'energia cinetica e quella potenziale sono uguali.

Risoluzione. L'energia potenziale di un oscillatore armonico è $U = ½\ ks^2$, che rappresenta l'energia totale dell'oscillatore quando $s = s_o$, cioè lo spostamento è quello massimo. Di conseguenza, quando $s = s_o/2$ l'energia potenziale è $(1/2)^2 = ¼$ di quella massima, sicché i restanti ¾ sono energia cinetica. Lo spostamento s' per cui l'energia potenziale è la metà di quella massima si ricava ponendo $½\ ks'^2 = ¼\ ks_0^2$, da cui $s = s_o/\sqrt{2}$.

8. Una ragazza di massa m = 45 kg si lancia nel vuoto sospesa a una caviglia con una fune elastica lunga 15 metri (questo sport pericolosissimo, vivamente sconsigliato, si chiama *bungee jumping*). Discutete il moto della ragazza, trascurando gli attriti, stabilendo se si tratti di un moto armonico e calcolando a) la velocità massima raggiunta, b) la discesa massima rispetto al punto di lancio. La costante elastica della fune, di lunghezza L = 15 m, è k = 200 N/m.

(fotografia o vignetta che illustra questa attività)

Risoluzione. Il moto della ragazza consiste di una fase iniziale in caduta libera e di una fase successiva in cui interviene l'elasticità della fune. Nella prima fase lo spostamento massimo verso il basso è pari alla lunghezza L della fune e il moto è uniformemente accelerato. Il tempo t_1 al quale termina questa fase si ottiene ponendo $L = ½\ gt_1^2$, da cui $t_1 = \sqrt{(2L/g)} = \sqrt{(2 \times 15/9{,}8)} = 1{,}75$ s. La velocità raggiunta a tale istante è $v_1 = gt_1 = 9{,}8 \times 1{,}75 = 17{,}2$ m/s. Nella fase successiva la fune si allunga frenando il moto della ragazza, fino ad arrestarla, allungandosi di ΔL a tale istante. In questo punto l'energia potenziale elastica assunta dalla fune, $½\ k\Delta L^2$, è uguale all'energia potenziale gravitazionale persa dalla ragazza: $mg(L+\Delta L)$. Uguagliando le due energie si ottiene la seguente equazione di secondo grado nell'allungamento ΔL: $\Delta L^2 - (2mg/k)\Delta L - 2mgL/k = 0$. Risolvendola, si ricava:

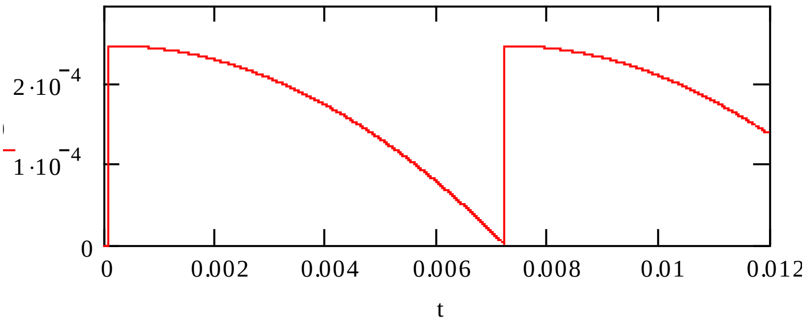
$$\Delta L = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2mgL}{k}} = \frac{45 \times 9{,}8}{200} + \sqrt{\frac{45^2 \times 9{,}8^2}{200^2} + \frac{2 \times 45 \times 9{,}8 \times 15}{200}} = 2{,}205 + \sqrt{4{,}86 + 66{,}15} = 10{,}6\ m$$

sicché la massima discesa della ragazza è: $L+\Delta L = 15 + 10{,}6 = 25{,}6$ m. Ancora successivamente, la fune riporta verso l'alto la ragazza, che in assenza di attriti dovrebbe raggiungere il punto di partenza. Più precisamente, la ragazza viene accelerata dalla corda fino alla distanza L dal punto di partenza, dove all'istante t_2 riacquista l'energia cinetica che possedeva all'istante t_1, ma con velocità diretta ora verso l'alto. Si conclude che il moto della ragazza è armonico soltanto nell'intervallo di tempo fra gli istanti t_1 e t_2, durante il quale si ha un sistema massa-molla con forza di richiamo proporzionale all'allungamento della corda.

9. Un piccolo insetto volante oscilla nell'aria sollevandosi periodicamente di 0,25 mm con un colpo delle sue ali e poi cadendo liberamente di altrettanto. Calcolate la frequenza di questo moto, supponendo trascurabile sia la durata del tempo durante il quale l'insetto si solleva sia la resistenza dell'aria. Tracciate un grafico di un periodo del moto, riportando lo spostamento sull'asse delle ordinate e il tempo sull'asse delle ascisse.

Risoluzione. Il periodo di oscillazione dell'insetto è determinato dal tempo trascorso nella caduta libera. Questa avviene con moto uniformemente accelerato dalla gravità, secondo la legge (→ Tomo I, pag. xxx) $s = ½\ g\ t^2$. Da questa, essendo

s_0 = 0,25 mm, si ricava la durata della caduta: $\Delta t = \sqrt{(2s_0/g)} = \sqrt{(2\times 0{,}25\cdot 10^{-3}/9{,}8)}$ = $7{,}14\cdot 10^{-3}$ s, che coincide con il periodo T dell'oscillazione. Pertanto la frequenza del moto è: $f = 1/T = 1/7{,}14\cdot 10^{-3}$ = 140 Hz. Il grafico del moto, rappresentato in figura, è costituito, durante ciascun periodo, da una salita istantanea di 0,25 mm e da una discesa graduale secondo la legge $s = ½\ g\ t^2$, rappresentata quindi da un arco di parabola.



10. Un estremo di un diapason vibra di moto armonico con ampiezza massima s_0 = 0,3 mm e velocità massima v_0 = 0,829 m/s. Calcolate la frequenza di vibrazione del diapason e l'accelerazione massima della punta, stabilendo quante volte essa è maggiore dell'accelerazione di gravità.

Risoluzione. La velocità massima v_0 di un moto armonico è legata allo spostamento massimo s_0 dalla formula (5). Da questa si ricava la pulsazione del moto $\omega = v_0/s_0$ e quindi la frequenza: $f = \omega/2\pi = v_0/(2\pi s_0) = 0{,}829/(6{,}28\times 3\cdot 10^{-4}) = 440$ Hz. L'accelerazione massima della punta del diapason si ricava dalla formula (6): $a_0 = \omega^2 s_0 = v_0^2/s_0 = 0{,}829^2/3\cdot 10^{-4}$ = $2{,}29\cdot 10^3$ m/s^2. Esprimendo l'accelerazione in unità di g, si ha: $a_0 = 2{,}29\cdot 10^3/9{,}8 = 234$ g.

11. Il pendolo usato da Foucault per dimostrare sperimentalmente la rotazione terrestre (→ Approfondimento 5) utilizza una sfera d'acciaio di 28 kg sospesa con un filo lungo 67 m. Tali scelte sono mirate a ottenere che le oscillazioni durino a lungo, a tal fine riducendo l'effetto degli attriti. Spiegate brevemente perché, secondo voi, Foucault ha scelto, in relazione agli obiettivi anzidetti, di utilizzare: a) un corpo sospeso di densità relativamente elevata, b) un corpo sospeso di massa relativamente grande, c) un filo di sospensione relativamente lungo.

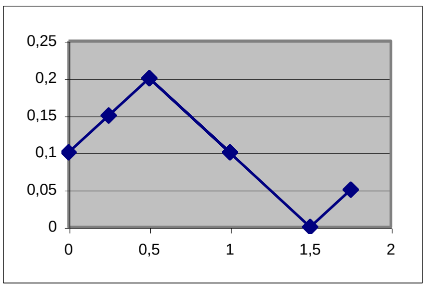
12. Facendo seguito all'enunciato del Problema 11, presentate brevemente delle proposte mirate ad aumentare ulteriormente la durata delle oscillazioni del pendolo, riducendo gli effetti dissipativi.

13. Si realizza un pendolo sospendendo a un filo un pezzo di una sostanza, simile alla naftalina, che durante le oscillazioni sublima, sicché la massa sospesa diminuisce apprezzabilmente durante le oscillazioni. La diminuzione della massa, secondo voi, ha qualche effetto sul moto del pendolo. E quali, se ne ha?

Risoluzione. La diminuzione della massa sospesa non ha alcun effetto sul periodo del pendolo, come mostra la formula (12). Almeno fino a che la massa sospesa si mantiene molto maggiore di quella del filo di sospensione. Quando diminuisce la massa, tuttavia, diminuisce proporzionalmente anche l'energia posseduta dal pendolo. Questa diminuzione rende maggiormente avvertibile l'effetto della resistenza dell'aria, sicché le oscillazioni del pendolo si smorzano sempre più rapidamente.

14. La tabella a fianco rappresenta le posizioni di una particella rispetto a una origine arbitraria ad alcuni istanti di tempo. La particella si trova in moto rettilineo oscillante con periodo T = 2 s. Riportate i dati in un grafico e stabilite se si tratta di un moto armonico.

tempo (secondi)	posizione (metri)
0	0,1
0,25	0,15
0,5	0,2
1	0,1
2,5	0,2
3,5	0
3,75	0,05



Risoluzione. Dato che il moto è periodico con periodo T = 2 s, riportiamo nell'intervallo 0,T i dati delle ultime tre righe della tabella (rispettivamente ai tempi 0,5 s; 1,5 s; 1,75 s. La figura mostra il grafico che così si ottiene. I dati disponibili suggeriscono che si tratti di una oscillazione di forma triangolare, con punto di equilibrio di ascissa 0,1 m, ampiezza massima 0,1 m e velocità costante 0,2 m/s, positiva durante metà del periodo, negativa durante l'altra metà. Non si tratta di un moto armonico.

15. Un blocco di legno a forma di parallelepipedo galleggia

nell’acqua. Esso viene pigiato verso il basso, senza immergerlo completamente, e poi liberato, sicché inizia a oscillare secondo la verticale. Secondo voi si tratta di un moto armonico?

Risoluzione. Caratteristica essenziale del moto armonico di una massa è la dipendenza lineare della forza di richiamo dallo spostamento, come in un sistema massa-molla. Si tratta dunque di stabilire se questa condizione è verificata per la spinta idrostatica (→ Tomo I, pag. …) a cui è soggetto il blocco di legno quando si sposta rispetto alla sua posizione di equilibrio. Non consideriamo qui la spinta che mantiene in equilibrio il blocco nel suo galleggiamento, ma la spinta addizionale che si manifesta quando questa subisce uno spostamento y in direzione verticale rispetto alla posizione di equilibrio. Questa spinta, in particolare, è data dal peso del volume V di acqua che viene spostato nel moto del blocco di legno rispetto alla posizione di equilibrio. Se il blocco ha sezione S, l’intensità della spinta è $\rho V(y) = \rho\ S\ y$; la spinta è diretta verso l’alto quando il blocco si trova al di sotto del punto di equilibrio, altrimenti verso il basso. Concludiamo pertanto che l’oscillazione del blocco di legno è un moto armonico, seppure evidentemente assai smorzato dalla resistenza offerta dell’acqua.

16. Una sfera di legno galleggia nell’acqua. Esso viene pigiata verso il basso, senza immergerla completamente, e poi liberata, sicché inizia a oscillare verticalmente. Secondo voi si tratta di un moto armonico?

Risoluzione. Facendo seguito a quanto esposto nella risoluzione del problema 15, osserviamo che quando la sfera si abbassa o si solleva verticalmente rispetto al suo punto di equilibrio le corrispondenti variazioni del volume d’acqua spostato non sono direttamente proporzionali allo spostamento. E quindi il moto della sfera non è un moto armonico.

17. Un oggetto viene posto su un tavolo che oscilla verticalmente di moto armonico con ampiezza massima $s_o = 1$ mm. La frequenza delle oscillazioni viene aumentata gradualmente, mantenendo costante l’ampiezza delle oscillazioni. Fino a quale valore f della frequenza l’oggetto resta in contatto con il tavolo?

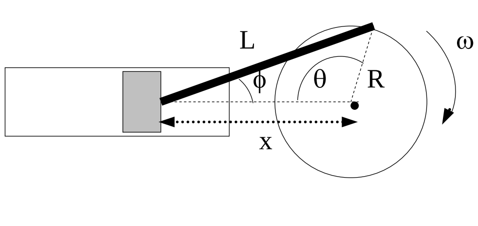
Risoluzione. L’oggetto resta in contatto con il piano del tavolo fino a che l’accelerazione massima del tavolo, e quindi dell’oggetto, è inferiore o uguale all’accelerazione di gravità. Questa accelerazione dipende dalla frequenza secondo la legge $a_o = \omega^2 s_o = 4\pi^2 f^2 s_o$, da cui, uguagliando a g l’accelerazione, si ricava $f = \sqrt{(g/s_o)}/2\pi = \sqrt{(9{,}8/0{,}001)}/6{,}28 = 15{,}8$ Hz.

18. Sulla membrana di un altoparlante disposta orizzontalmente si versano dei granelli di zucchero. L’altoparlante viene collegato a un generatore di segnali elettrici sinusoidali alla frequenza di 100 Hz. Aumentando gradualmente l’ampiezza del segnale elettrico aumenta corrispondentemente l’ampiezza del moto armonico della membrana, fino a che i granelli cominciano a saltare. Calcolate il valore dell’ampiezza massima di oscillazione a cui ha inizio tale fenomeno. Stabilite se questo valore resterebbe il medesimo o sarebbe diverso se invece di granelli di zucchero si trattasse di pallini di piombo.

Risoluzione. Qualsiasi oggetto posto sulla membrana vibrante dell’altoparlante resta in contatto con essa fintanto che l’accelerazione della membrana resta inferiore a quella di gravità, indipendentemente dalla sua densità o dalla sua massa (però soltanto se quest’ultima è abbastanza piccola da non perturbare apprezzabilmente il moto della membrana). L’accelerazione della membrana è legata allo spostamento dalla formula (6). Sostituendo in tale formula l’accelerazione a_o con l’accelerazione di gravità g si ottiene lo spostamento limite oltre al quale i granelli di zucchero iniziano a saltare: $s_o = g/\omega^2 = g/4\pi^2 f^2 = 9{,}8/(4\times 3{,}14^2\times 100^2) = 2{,}48\cdot 10^{-5}$ m = 0,0248 mm.

19. Un bambino di massa 30 kg si trova su un’altalena di massa 5 kg, sospesa con cavi lunghi 2 m, che durante ciascuna oscillazione perde 1/10 della sua energia. Calcolate il periodo di oscillazione, la costante di tempo del sistema e il numero di oscillazioni dopo le quali l’angolo di oscillazione si dimezza.

Risoluzione. Premesso che il valore della massa dell’altalena e del bambino non influiscono sul periodo di oscillazione, questo si calcola utilizzando la formula (12): $T = 2\pi\sqrt{(L/g)} = 6{,}28\sqrt{(2/9{,}8)} = 2{,}84$ s. La costante di tempo τ si ottiene dalla formula (16), che rappresenta il decadimento dell’energia dovuto agli attriti. Se dopo un tempo t = T l’energia persa è 1/10 di quella iniziale, l’energia si riduce a 9/10 di quella iniziale. Si ha pertanto $0{,}9 = e^{-T/2\tau}$, cioè, prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri, $\ln(0{,}9) = -T/2\tau$, da cui si ha infine: $\tau = -T/2\ln(0{,}9) = 2{,}84/(2\times 0{,}105) = 13{,}5$ s. La durata t’ dell’intervallo di tempo dopo il quale l’angolo di oscillazione si dimezza si ricava dalla formula (17), trascurando il termine oscillante e ponendo $s(t') = s_o/2$: $0{,}5 = e^{-t'/\tau}$, da cui si ha $t' = -\tau/\ln(0{,}5) = 9{,}36$ s, pari a 9,36/2,84 = 3,30 oscillazioni.



20. Stabilite se il pistone che si sposta nel cilindro del motore d'auto in figura si muove di moto armonico quando il disco ruota con velocità angolare costante.

Risoluzione. Scriviamo la distanza x nella forma: $x = L \cos\phi + R \cos\theta$. Il secondo termine è armonico, dato che l'angolo θ è proporzionale a t, essendo $\theta = \omega t$; ma non così il primo termine, dato che l'angolo ϕ oscilla soltanto fra un valore massimo e uno minimo (di modulo ϕ_{max} = arcsen(R/L)). E quindi il moto del pistone non è armonico.

21. Su un pianeta del nostro sistema solare un pendolo lungo 1 m oscilla con periodo di 3,25 s. Calcolate l'accelerazione di gravità e informatevi per stabilire di quale pianeta si tratti.

Risoluzione. Calcoliamo l'accelerazione di gravità g' del pianeta ricavando questa grandezza dalla formula (12): $g' = 4\pi^2 L/T^2 = 4\times9{,}86\times1/3{,}25^2 = 3{,}73\ m/s^2$. Questo valore coincide con quello dell'accelerazione di gravità sulla superficie di Marte.

22. Una bilancia inerziale utilizza un cristallo di quarzo di massa m = 1 mg che oscilla alla frequenza f = 10 MHz. Calcolate la sensibilità dello strumento, cioè la minima massa aggiuntiva Δm che esso può rivelare, sapendo che lo strumento è in grado di apprezzare variazioni di frequenza di 1 Hz.

Risoluzione. Utilizziamo la formula (9) per determinare la relazione fra la frequenza di oscillazione del quarzo in assenza di masse aggiuntive: $f = \sqrt{(k/m)}$ e quella in presenza della massa aggiuntiva Δm: $f' = \sqrt{(k/(m + \Delta m)}$. Pertanto la variazione di frequenza è $\Delta f = f - f' = f(1-1/\sqrt{(1+\Delta m/m)})$. Da tale espressione, sapendo che lo strumento può apprezzare la variazione di frequenza Δf = 1 Hz, si ricava:

$$\Delta m = m\left(\frac{1}{\left(1-\Delta f/f\right)^2}-1\right) = 10^{-6}\left(\frac{1}{\left(1-10^{-6}\right)^2}-1\right) = 10^{-6}\times 2\cdot10^{-6} = 2\cdot10^{-12}\ kg\ \cdot$$

23. Una massa viene attaccata a una "antimolla", cioè a un dispositivo che esercita una forza di intensità proporzionale allo spostamento, ma con segno positivo anziché negativo come nelle molle usuali. Cosa avviene secondo voi?

Risoluzione. Il sistema massa-antimolla si trova in equilibrio instabile. Supponiamo infatti che a un dato istante lo spostamento sia nullo, cioè s = 0, e quindi sia nulla anche la forza esercitata dall'antimolla, di intensità: F = ks. Qui il sistema si trova evidentemente in equilibrio. Se ora spostiamo la massa di una piccola quantità Δs, su di essa si eserciterà una forza, diretta nello stesso verso dello spostamento, di intensità $F = k\Delta s$. Questa accelererà la massa allontanandola ulteriormente dal punto iniziale, provocando quindi un ulteriore aumento dell'intensità della forza, che a sua volta …. E' importante osservare che il fenomeno si verifica indipendentemente dal segno dello spostamento iniziale Δs. Concludiamo pertanto che il sistema è in equilibrio instabile.

24. Un sistema massa-molla con massa m = 10 kg, costante elastica k = 1000 N/m e costante di tempo τ = 100 s viene eccitato da una forza periodica sinusoidale di intensità massima F_o = 1 N. Calcolate la pulsazione di risonanza del sistema. Calcolate lo spostamento massimo per i seguenti valori della frequenza di eccitazione: f_1 = 0,159 Hz , f_2 = 1,59 Hz , f_3 = 15,9 Hz.

Risoluzione. Utilizziamo la formula (8) per calcolare la pulsazione del sistema: $\omega_0 = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(1000/10)} = 10$ rad/s. Il calcolo dello spostamento alle frequenze f_1, f_2 e f_3, a cui corrispondono rispettivamente le pulsazioni $\omega_1 = 2\pi f_1$= 1 rad/s, $\omega_2 = 2\pi f_2$ = 10 rad/s, $\omega_3 = 2\pi f_3$ = 100 rad/s, si svolge utilizzando la formula (18). Si ha pertanto:

$$s_0\left(\omega_1\right) = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)^2+4\omega_1^2/\tau^2}} = \frac{1}{10\sqrt{\left(10^2-1\right)^2+4/100^2}} = 1{,}01\cdot10^{-3}\ m$$

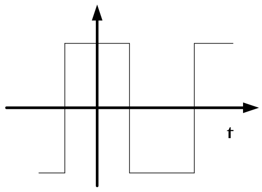
$$s_0\left(\omega_2\right) = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_2^2\right)^2+4\omega_2^2/\tau^2}} = \frac{1}{10\sqrt{4\times10^2/100^2}} = 0{,}5\ m$$

$$s_0\left(\omega_3\right) = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_3^2\right)^2+4\omega_3^2/\tau^2}} = \frac{1}{10\sqrt{\left(10^2-100^2\right)^2+4\times100^2/100^2}} = 1{,}01\cdot10^{-5}\ m$$

Il valore relativamente grande dello spostamento alla frequenza f_2 manifesta l'effetto della risonanza. Notiamo infine che usando le formule suggerite nel testo per i due casi di frequenza di eccitazione molto maggiore o molto minore si ottengono i seguenti risultati approssimati molto prossimi a quelli esatti dato sopra: $s_0(\omega_1) \approx F_0/m\omega_0^2 = 1/(10\times10^2) = 10^{-3}$ m; $s_0(\omega_3) \approx F_0/m\omega_3^2 = 1/(10\times100^2) = 10^{-5}$ m. E del resto alla risonanza la formula (8) si può semplificare nella forma esatta: $s_0(\omega_0) = F_0\tau/2m\omega_0$.

25. Spiegate perché una sequenza di impulsi di periodo appropriato può portare un'altalena in forte oscillazione.

Risoluzione. in base al teorema di Fourier, una sequenza di impulsi di periodo T, come qualsiasi altra funzione periodica del tempo, può essere rappresentata come la sovrapposizione di sinusoidi di periodo T, T/2, T/3, … Se il periodo della sequenza coincide con quello proprio dell'altalena, allora la sinusoide fondamentale, di periodo T, porta il sistema in risonanza, provocando oscillazioni di grande ampiezza.



26. Un'onda quadra è un'onda periodica che, come quella in figura, per metà del periodo assume un valore positivo e per l'altra metà assume lo stesso valore con segno negativo. Sappiamo che nella rappresentazione di Fourier di questa onda, data dalla formula (19), figurano soltanto le armoniche dispari, cioè i termini con periodo T, T/3, T/5, … , tutti con fase $\phi = 0$. Utilizzate un foglio elettronico per determinare sperimentalmente le ampiezze da assegnare ai primi tre termini della serie, sommando i quali si ottenga un'onda che approssimi ragionevolmente un'onda quadra. (Suggerimento: aggiungete un termine dopo l'altro, ogni volta aggiustandone l'ampiezza).

Risoluzione. Sul foglio elettronico si predispone una colonna con i valori dei tempi a cui eseguire i calcoli. Considerando, per semplicità, un'onda quadra con periodo T = 1 s, si potrà riempire questa colonna con i seguenti valori del tempo: 0; 0,05; 0,1; … ; 0,95; 1. Ciascuna delle colonne a fianco di questa conterrà i valori, corrispondenti ai tempi della prima colonna, di uno dei termini della serie: rispettivamente $A_1 \cos(2\pi t/T)$, $A_3 \cos(3\times 2\pi t/T)$, $A_5 \cos(5\times 2\pi t/T)$. In corrispondenza di ciascuna di queste colonne si predisporrà una casella, dove scrivere i valori di prova dei coefficienti usati nei calcoli: A_1 (che si fisserà uguale a 1), A_3 e A_5. Un'altra colonna conterrà infine la somma dei tre termini anzidetti e sarà riportata sulle ordinate di un grafico avente il tempo come ascissa. Un semplice procedimento per stimare i valori dei coefficienti che meglio approssimano l'onda quadra consiste nel porre inizialmente $A_3=0$ e $A_5=0$, poi aumentare gradualmente A_3 fino a che l'approssimazione appare ragionevole, e quindi eseguire la stessa operazione per A_5. La figura rappresenta il grafico che si ottiene utilizzando i valori esatti dei coefficienti ($A_1 = 1$, $A_3 = 1/3$, $A_5 = 1/5$): vi sono delle evidenti ondulazioni residue, che si spiegano considerando i termini di ordine superiore che non sono stati rappresentati nei calcoli. Un procedimento più rigoroso consiste nel calcolare la somma degli scarti quadratici fra l'onda quadra desiderata e la sua approssimazione.