Modulo 1 Oscillazioni, onde e suoni

Unità 2 Le onde e le loro proprietà

2.0 Ascoltando la musica alla radio in riva al mare, le uniche onde di cui ci accorgiamo sono quelle che si frangono sulla spiaggia. Ma in realtà siamo in presenza di molte altre onde, fra loro assai diverse: le onde sonore grazie alle quali possiamo udire la musica; le onde radio che raggiungono l'antenna del nostro apparecchio; le onde che costituiscono la luce che ci permette di vedere attorno; le radiazioni ultraviolette che ci abbronzano, …

Da questo esempio, e da tanti altri, si capisce che i fenomeni ondulatori sono tanto comuni nella natura quanto sfruttati nella tecnica. E diciamo anche subito che in Fisica le onde costituiscono un argomento trasversale, nel senso che esse riguardano fenomeni di natura diversa - meccanici, elettrici, ottici, … -, ma possiedono tuttavia proprietà generali comuni: quelle appunto di cui ci occupiamo in questa Unità. La più importante di queste proprietà, per cui l'argomento delle onde riveste un ruolo centrale, consiste nel trasportare energia a distanza.

Figura 0. Sdraiati al sole in spiaggia, siamo investiti da una varietà di onde: suoni, luce, raggi ultravioletti, raggi infrarossi, onde radio e altre ancora..
(Vignetta da fare: ragazzo che ascolta la radio al sole vicino alla riva dove si frangono le onde)

2.1 Prime osservazioni sulle onde

Le onde del mare, una dopo l'altra, raggiungono la riva. Però ad esse non si accompagna un corrispondente flusso d'acqua: infatti mentre le onde avanzano, l'acqua si limita a oscillare, come dimostra il fatto che qualsiasi oggetto che vi galleggia resta sempre pressappoco nella stessa posizione. Allo stesso modo, all'emissione di suoni da un altoparlante non si accompagna un corrispondente flusso d'aria diretto verso chi ascolta. E' chiaro allora che le onde marine e le onde sonore si propagano a distanza, senza però trasportare materia: una proprietà generale di tutti i diversi tipi di onde, qualunque sia la loro natura fisica.

Ma allora che cosa trasportano le onde? Per rispondere basta toccare un oggetto esposto per qualche tempo al Sole: questo risulterà caldo grazie al calore assorbito dai raggi solari, i quali dunque trasportano energia. Trasportano energia anche le onde del mare, che per questo possono arrivare a provocare catastrofi, come nel caso dello "tsunami" del giorno di Santo Stefano del 2004, le onde sonore, le onde radio, … Anche questa è dunque una proprietà generale di tutti i diversi tipi di onde. Ed è una proprietà importante per molte ragioni. Fra cui quella dello stretto legame (→ Tomo V, pag. xxx) che vi è fra energia e informazione. Sicché le onde sono essenziali per trasmettere informazioni a distanza: onde sonore che, quando parliamo, si propagano nell'aria; onde elettromagnetiche guidate che si propagano lungo i conduttori delle linee telefoniche; onde radio che si propagano nell'aria e nel vuoto; onde luminose che viaggiano nelle fibre ottiche dei moderni sistemi di comunicazione, …

Per fare un altro passo verso la comprensione delle proprietà delle onde osserviamo la superficie di uno specchio d'acqua dopo che vi abbiamo gettato un sasso: a partire dal punto d'impatto si creano delle perturbazioni regolari che se ne allontanano mantenendo la loro forma. Possiamo dire allora che *le onde sono forme in movimento*. A conclusioni analoghe si arriva anche considerando le onde sonore oppure le onde radio, perchè in entrambi i casi queste perturbazioni, man mano che si propagano a distanza, mantengono la loro forma. Infatti percepiamo gli stessi suoni, sia pure con minore intensità, anche quando ci allontaniamo da una sorgente sonora, e allo stesso modo l'ascolto di un messaggio al cellulare non cambia anche quando ci spostiamo, almeno finchè il campo è sufficiente a garantire il collegamento.

> Prime conclusioni sulle onde.
> - Le onde sono perturbazioni che si propagano a distanza.
> - Le onde non trasportano materia.
> - Le onde trasportano energia.
> - Le onde sono usate per trasmettere informazioni a distanza.

Propagazione in una, due e tre dimensioni
Le luce di una candela, il suono prodotto da un tuono, le onde radio generate da una antenna, si propagano a partire dalla sorgente in tutte le direzioni, almeno finchè non trovano ostacoli. Diciamo quindi che queste onde si propagano in tre dimensioni e che, nel caso di una sorgente di dimensioni trascurabili, si tratta di **onde sferiche**, come mostrato in figura 3. Infatti la perturbazione, che a un dato istante si allontana dalla sorgente puntiforme S, viaggia con la sua velocità caratteristica, manifestandosi a un tempo successivo su tutti i punti della superficie della sfera di centro S e raggio uguale alla distanza percorsa fino a quel momento. A grandi distanze dalla sorgente, d'altra parte, l'onda sferica ci appare localmente, con ottima approssimazione, come una **onda piana**.

Altri tipi di onde, invece, si propagano lungo una superficie. Questo è il caso delle onde del mare, oppure delle onde prodotte suonando un tamburo, che quando subisce una percussione si propagano attraverso la sua membrana. Diciamo che queste onde si propagano in due dimensioni: la perturbazione che ha origine in un punto crea **onde circolari** che se ne allontanano. E in questo caso, localmente, l'onda circolare si manifesta come un'**onda rettilinea**.

Va precisato che in un mezzo le onde si propagano in tutte le direzioni (in tre o due dimensioni) soltanto se esso è *omogeneo* e *isotropo* (cioè le sue proprietà non dipendono dalla direzione).

Altre volte, poi, le onde vengono *guidate* da una struttura unidimensionale, attraverso la quale esse si propagano. Ciò avviene, per esempio, alle onde luminose che viaggiano nei cavi ottici usati oggi per trasmettere a distanza le informazioni, ai segnali elettrici che viaggiano lungo le linee telefoniche, alle onde che si creano lungo una fune quando ne facciamo oscillare un estremo, alle onde elastiche che si propagano lungo lo spago che collega due membrane a distanza (il gioco del "telefono" che certamente conoscete). Diciamo allora che queste onde si propagano in una sola dimensione.

Questo aspetto puramente geometrico della propagazione, che anch'esso non dipende dalla natura fisica delle onde, presenta una conseguenza importantissima per quanto riguarda l'energia. Che discutiamo supponendo, per semplicità, che l'energia posseduta inizialmente dall'onda si conservi nel tempo, e dunque nello spazio, durante la sua propagazione, ossia, in altre parole, che i fenomeni di assorbimento di energia da parte del mezzo in cui essa si propaga siano trascurabili. In tal caso è evidente che un'onda unidimensionale viaggia mantenendo la sua energia, punto per punto, nel suo percorso. L'energia di un'onda circolare, in due dimensioni, e quella di un'onda sferica, in tre dimensioni, si distribuiscono invece su regioni sempre più estese. Sicché localmente il flusso di energia si riduce man mano che l'onda si allontana dalla sorgente.

Più precisamente, chiamando r la distanza dalla sorgente, questo flusso è inversamente proporzionale a r nel caso bidimensionale, a r^2 nel caso tridimensionale, che è il più comune perché riguarda la propagazione nello spazio. La dimostrazione è semplice: quando l'onda ha raggiunto la distanza r dalla sorgente, la sua energia E si distribuisce uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio r. E quindi il suo flusso, misurato in unità di energia attraverso una superficie unitaria, è:

$$E/4\pi r^2 \qquad (J/m^2) \tag{1}$$

Diciamo perciò che *il flusso di energia di un'onda che si propaga nello spazio subisce un'attenuazione inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente*, e questo avviene, va sottolineato, per motivi puramente geometrici.

Si chiama poi **intensità I** di un'onda il flusso di potenza corrispondente, cioè il flusso di energia nell'unità di tempo. Per un'onda sferica prodotta da una sorgente di potenza P, a distanza r dalla sorgente si ha:

$$I = P/4\pi r^2 \qquad (W/m^2) \tag{1a}$$

Esempio 1. Il flusso di potenza di un'onda radio che raggiunge una sonda spaziale.
Vogliamo calcolare il flusso di potenza delle onde radio, emesse da un trasmettitore da 10 kW

situato sulla Terra, che raggiungono una sonda spaziale in orbita attorno a Giove, quando si trova a circa $8 \cdot 10^8$ km di distanza dal nostro pianeta.
Utilizzando la formula (1a) si ottiene: $P/4\pi r^2 = 10^4/(12{,}56\times(8\cdot 10^{11})^2) = 1{,}24\cdot 10^{-21}$ W/m^2.

Le considerazioni precedenti mostrano che la trasmissione a distanza di energia, e quindi anche di informazioni, avviene assai più efficacemente attraverso onde guidate piuttosto che onde che si propagano in un mezzo tridimensionale. Notiamo tuttavia che la formula (1), come del resto il calcolo svolto nell'Esempio 1, presuppone che l'onda si propaghi allo stesso modo in tutte le direzioni. Quando però lo scopo è quello di raggiungere un determinato bersaglio si fa in modo che l'onda privilegi la direzione del bersaglio. In tal caso il flusso di energia che raggiunge l'obiettivo è maggiore. Ciò si rappresenta introducendo nella formula (1) un opportuno fattore moltiplicativo, dipendente dalla direzione, senza però che si modifica la dipendenza da r^2. Nelle comunicazioni spaziali, per esempio, si usano antenne direttive, che concentrano l'energia entro un angolo anche relativamente piccolo, creando un fascio di radiazione diretto verso il bersaglio da raggiungere. Fasci assai più stretti, d'altra parte, si ottengono con le radiazioni luminose: un fascio laser, in particolare, viaggia mantenendosi assai stretto, con un angolo di divergenza che può essere di appena una frazione di milliradiante.

Un esempio immediato: le onde in una sbarretta

Veniamo ora a un esempio concreto e diretto, considerando l'esperimento illustrato nella figura 5: la generazione, la propagazione e la rivelazione di un'onda lungo una sbarretta metallica. Quando la pallina A colpisce la sbarretta, si crea un'onda di compressione che si propaga a distanza a partire a partire dal punto sorgente. Questa onda raggiunge poi la pallina sospesa B, lanciandola in moto. E qui è importante osservare che nel corso del fenomeno la sbarretta, essendo sorretta dal morsetto, resta complessivamente ferma. Si spostano invece l'una rispetto all'altra, con un moto a catena, le particelle della sbarretta, ciò che costituisce appunto la perturbazione che si propaga.

Gli aspetti essenziali del fenomeno si individuano facilmente. Abbiamo una struttura elastica unidimensionale, la sbarretta, attraverso la quale può propagarsi la perturbazione, nel nostro caso costituita da una compressione nella direzione di propagazione dell'onda. Abbiamo una sorgente, l'impulso applicato a un estremo della sbarretta, e all'altro estremo abbiamo un "rivelatore" dell'arrivo della perturbazione, la pallina sospesa. La perturbazione si crea perché la sorgente cede energia alla sbarretta, l'energia che poi la perturbazione, viaggiando, trasporta all'altro estremo provocando così il moto del rivelatore.

Notate che la propagazione dell'onda attraverso la sbarretta non è istantanea. La perturbazione viaggia infatti con una velocità finita, che dipende dal tempo necessario a trasferire energia da una porzione perturbata della sbarretta a quella adiacente, e quindi dalle caratteristiche elastiche e inerziali della sbarretta. In pratica, il ritardo fra eccitazione e risposta si osserva più facilmente usando una sbarretta di grande lunghezza.

Figura 1. In un campo di grano, quando soffia il vento, le spighe ondeggiano creando perturbazioni che si propagano a distanza. Ciò che si sposta è la perturbazione, non le spighe che evidentemente restano al loro posto.
(fotografia da trovare)

Figura 2. Quando un sasso colpisce la superficie di uno specchio d'acqua, si creano delle onde circolari: perturbazioni che si allontanano dal punto d'impatto mantenendo la propria forma, sia pure sempre più attenuata.
(Fotografia da trovare)

Figura 3. Le onde radio emesse da una antenna trasmittente si propagano nello spazio in tutte le direzioni. Attorno alla sorgente esse si manifestano come onde sferiche, ma a grande distanza, localmente, possiamo considerarle come onde piane.
(adattare da Mondo della Fisica, tomo B, pag. 527, un po' tagliata a sinistra ed estesa a destra, aggiungendo la scritta S in prossimità dell'antenna, più piccola)
Figura 4. Lo *stetoscopio* è usato dai medici per ascoltare, a scopo diagnostico, i suoni provenienti dall'interno del corpo

del paziente. La trasmissione di questi segnali è affidata all'aria contenuta in due tubicini cavi flessibili, che per le onde sonore costituiscono una struttura guidante unidimensionale.
(fotografia come in Mondo della Fisica, tomo B, pag. 527)

Figura 5. a) Una pallina oscillante (A) colpisce un estremo della sbarretta metallica, che un morsetto mantiene in posizione fissa; b) La perturbazione (un'onda di compressione) si propaga fra le particelle della sbarretta fino alla pallina sospesa (B) appoggiata all'altro estremo, che viene quindi lanciata in moto. Quale altezza raggiungerà la pallina B, identica all'altra, nel caso ideale?
(Adattare da Hecht, vol. 1, pag 380, aggiungendo le scritte A e B in prossimità delle due palline)

2.2 Onde trasversali e onde longitudinali

Dalla natura fisica delle onde dipende il mezzo in cui esse possono propagarsi. Ma prima occorre distinguere fra onde di tipo traversale e di tipo longitudinale. Il modo più semplice per comprendere questa distinzione è quello di considerare le onde elastiche in una molla lunga e cedevole. Infatti, come mostra la figura 6, possiamo generare onde nella molla scuotendone un estremo, quando l'altro è fisso, in due modi: muovendolo longitudinalmente, cioè comprimendo ed estendendo la molla, oppure spostandolo trasversalmente, cioè su e giù rispetto alla molla. Nel primo caso si crea un'*onda longitudinale*, chiamata così perché i punti della molla subiscono spostamenti soltanto in direzione longitudinale, cioè nella direzione di propagazione dell'onda, come avveniva nella sbarretta in figura 5. L'onda che si crea nel secondo caso si chiama invece *onda trasversale*, perché i punti della molla subiscono spostamenti soltanto in direzione trasversale a quella di propagazione.

In generale, *si chiamano* ***onde longitudinali*** *quelle in cui la direzione delle perturbazioni è la stessa in cui l'onda si propaga,* ***onde trasversali*** *quelle in cui la direzione delle perturbazioni è perpendicolare a quella di propagazione*, qualunque sia la natura fisica delle perturbazioni che costituiscono l'onda. A queste si aggiungono le onde che si propagano lungo la superficie dell'acqua, che come mostra la figura 7 sono una combinazione di onde longitudinali e trasversali, e le *onde torsionali*, che sono una variante di quelle trasversali. Un'onda torsionale si crea, per esempio, quando si torce bruscamente un estremo di un cilindro metallico sottile con l'altro estremo fisso, e il moto di torsione si propaga lungo il cilindro.

Tutte i tipi di *onde meccaniche*, che sono costituite da perturbazioni riconducibili a spostamenti, come le onde in una molla, possono propagarsi soltanto in un mezzo materiale, le cui particelle oscillano al passaggio dell'onda. Per l'esistenza di queste onde, in altre parole, è necessaria la presenza di qualcosa di materiale che possa appunto oscillare. E quindi queste onde non si trasmettono attraverso il vuoto. Saprete infatti che gli astronauti discesi sulla Luna potevano comunicare fra loro soltanto via radio.

Attraverso i corpi solidi si possono propagare onde meccaniche sia longitudinali che trasversali. In entrambi i casi grazie all'elasticità, che crea forze di richiamo in presenza di spostamenti sia longitudinali che trasversali, grazie alle forze di legame fra le molecole. Le onde trasversali, invece, non possono propagarsi attraverso i liquidi e i gas. Un fluido, infatti, può essere compresso o espanso, e in ciò manifesta elasticità, ma non sostiene sforzi di taglio. Infatti quando un volumetto di liquido o di gas viene spostato trasversalmente, esso non trasmette il moto agli strati adiacenti, rispetto ai quali le sue molecole scorrono senza esercitare forze apprezzabili.

Totalmente diverso è il caso delle onde radio o della luce, e in generale delle *onde elettromagnetiche*. Qui le perturbazioni, infatti, non sono di natura meccanica ma, come vedremo nel Tomo IV, di natura elettrica e magnetica. Sicché queste onde possono propagarsi non soltanto attraverso determinati mezzi materiali - corpi trasparenti, nel caso della luce – ma anche nel vuoto. Vari tipi di radiazioni ci arrivano infatti sia dal Sole che da corpi celesti assai lontani, in tal caso attraversando lo spazio intergalattico dove si trova appena un atomo per metro cubo.

Approfondimento 1. L'origine delle onde del mare e degli tsunami.
Le onde che si propagano sulla superficie del mare e dei grandi specchi d'acqua sono provocate dall'azione del vento. Immaginiamo che a un dato istante, quando il vento inizia a spirare, la superficie dell'acqua sia perfettamente orizzontale. Qualsiasi piccola irregolarità nel flusso del

vento produrrà delle corrispondenti variazioni della pressione atmosferica sulla superficie dell'acqua: dove la pressione è maggiore l'acqua si abbasserà leggermente, innalzandosi invece laddove la pressione è maggiore. Il risultato è la formazione di piccole increspature, che la spinta continua del vento pone in moto, facendone al tempo stesso crescere l'ampiezza.

Questo fenomeno di crescita graduale può condurre, in mare aperto e con vento forte e costante, a onde di altezza notevole, che nei casi estremi possono raggiungere 8 metri nel Mediterraneo e oltre 15 metri negli oceani. Quando il vento viene a cessare, le onde continuano a propagarsi, attenuandosi per effetto degli attriti, ma solo assai lentamente. Sicché esse possono raggiungere zone anche molto distanti da dove il vento le ha generate.

Del tutto diversa è l'origine delle onde solitarie, chiamate **tsunami** (un termine giapponese che significa "onda nel porto"), che sono prodotte da fenomeni impulsivi come i terremoti sottomarini oppure la caduta in mare di grandi masse di roccia o di ghiaccio. Queste onde si propagano con modalità particolari, cioè quasi senza attenuarsi, su distanze anche di migliaia di kilometri. La loro velocità è data approssimativamente dalla legge $v = \sqrt{(gd)}$, dove g è l'accelerazione di gravità e d la profondità del mare: per esempio, a una profondità di 4 km corrisponde una velocità di circa $\sqrt{4 \cdot 10^4} \approx 190$ m/s ≈ 700 km/h. Di altezza modesta (~1 m) quando si propagano in mare aperto, gli tsunami si manifestano in "muraglie d'acqua" di grande altezza (10-30 m) quando raggiungono le coste, sulle quali si abbattono con effetti rovinosi. In qualche occasione con effetti addirittura catastrofici, come nel caso del maremoto di Lisbona del 1755 o di quello del 26 Dicembre 2004. Quest'ultimo evento, prodotto da un terremoto verificatosi nei pressi dell'isola di Sumatra nel quale si è liberata una enorme quantità di energia ($\sim 3 \cdot 10^{18}$ joule), si valuta che abbia provocato oltre 200 000 vittime in vari Paesi, nelle regioni costiere dell'oceano Indiano.

L'aumento dell'altezza di uno tsunami in prossimità della costa si capisce riflettendo sulla formula precedente: quando la profondità del mare diminuisce, la velocità dell'onda diminuisce a sua volta, sicché l'energia trasportata dallo tsunami si concentra in uno spazio assai minore provocando un forte aumento dell'altezza delle onde, come è mostrato nella figura A.
Informazioni (in inglese) sugli tsunami al sito http://www.ess.washington.edu/tsunami/index.html

Figura A. Uno tsunami di piccola ampiezza e grande velocità (**v**) in mare aperto, (a) rallenta fortemente (**v'**) in prossimità della costa, perchè il mare è meno profondo, provocando un forte aumento dell'altezza delle onde (b).

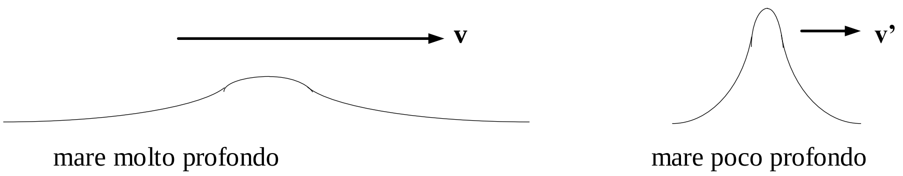


Figura 6. a) Quando comprimiamo l'estremo della molla, la perturbazione si propaga lungo la molla costituendo un'onda longitudinale: i singoli tratti della molla si spostano in direzione parallela a quella in cui si propaga l'onda; b) Quando spostiamo trasversalmente l'estremo della molla, la perturbazione si propaga lungo la molla costituendo un'onda trasversale: i singoli tratti della molla si spostano in direzione perpendicolare a quella in cui si propaga l'onda. (Adattare da Hecht, vol. 1, pag 381, sostituendo le scritte A con s_o, la scritta x con s)

Figura 7. Al passaggio di un'onda, l'acqua che si solleva a formare una cresta non proviene dal basso, ma dall'avvallamento contiguo. Ciascun volumetto d'acqua in prossimità della superficie è si sposta sia longitudinalmente (avanti e indietro nella direzione di propagazione, indicata dalla freccia nera) che trasversalmente (su e giù in direzione verticale), con un moto complessivo rotatorio (freccia rossa curva), come si osserva esaminando il moto di un turacciolo che galleggia sull'acqua.
(adattare da Walker vol.II, pag.O3, fig.5)

Figura 8. Nei terremoti si generano onde sismiche, sia trasversali che longitudinali, che possono essere rivelate anche a grandi distanze dall'*ipocentro* del sisma. E' possibile distinguerle perché gli strumenti le registrano a tempi diversi dato che esse si propagano con velocità differenti. Non si osservano, tuttavia, onde trasversali quando la congiungente dell'ipocentro del terremoto con il sito di osservazione passa attraverso la regione centrale della Terra, parte della quale è costituita da metalli fusi. Sapete spiegare perché?

(Adattare da Hecht, vol. 1, pag 381, parte b); sostituendo le scritte con le seguenti: Terremoto, Onde trasversali, Nucleo liquido, Nucleo solido, Mantello solido, Terra)

2.3 Onde armoniche

Muoviamo rapidamente su e giù, una volta soltanto, l'estremità di una fune ben tesa, con l'altro estremo fissato a un sostegno (figura 9). Questa eccitazione di breve durata provoca nella fune un'**onda impulsiva**, che si manifesta in una perturbazione trasversale che si propaga mantenendo la sua forma, come si osserverebbe fotografando la fune a istanti successivi. Man mano che l'onda si propaga, infatti, ciascun punto della fune ripete, sia pure approssimativamente, gli spostamenti impartiti al suo estremo. Si può verificare sperimentalmente che l'onda viaggia con velocità costante, indipendente dall'ampiezza dell'eccitazione.

Si ottiene invece un'**onda periodica** quando l'estremità della fune viene spostata periodicamente; e in particolare si ottiene un'**onda armonica** quando questo spostamento segue la legge sinusoidale. Anche in questo caso ciascun punto della fune si muove con la stessa legge con cui si muove l'estremità, sicché quando l'eccitazione è armonica tutti i punti della fune si spostano di moto armonico. Ma è armonico, cioè segue la legge sinusoidale, anche l'andamento degli spostamenti lungo la fune, come conseguenza della propagazione dell'onda con velocità costante. Per questo diciamo che l'onda lungo la fune è "doppiamente armonica", cioè armonica rispetto sia al tempo che allo spazio. E ora proviamo a dimostrarlo.

Osserviamo subito che per descrivere l'onda compiutamente occorre una espressione che fornisca gli spostamenti s dei punti della fune in funzione sia del tempo t che della loro posizione x lungo la fune. Cioè occorre ricavare una funzione di due variabili, s(x, t), che ci permetta di calcolare lo spostamento s a qualsiasi istante di tempo t e in qualsiasi posizione x.

Per semplificare le cose, fissiamo l'attenzione su un punto della fune, scegliendo quello all'inizio della corda, dove x = 0, e occupiamoci del suo spostamento in funzione del tempo. Siccome sappiamo che si tratta di un moto armonico, possiamo descriverlo con la legge oraria:

(2) $s(0, t) = s_0 \cos \omega t = s_0 \cos (2\pi t/T)$

> Che significa la notazione s(0, t)?
> Che nella funzione di due variabili s(x, t) abbiamo fissato il valore (x = 0) della prima variabile, ottenendo quindi una funzione di una sola variabile, cioè il tempo t.

Questa legge è rappresentata nel grafico di figura 10, dove si individuano i due parametri essenziali del moto armonico: lo spostamento s_0 e il periodo T.

Ma sappiamo anche che la perturbazione viaggia attraverso la fune con velocità v costante, mantenendosi invariata. Perciò in un altro punto, di ascissa x, la perturbazione arriverà con un ritardo $\Delta t = x/v$ rispetto al punto iniziale. E quindi in questo punto lo spostamento sarà quello del punto iniziale, ma ritardato di Δt, cioè:

$$s(x,t) = s(0, t-\Delta t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi(t-\Delta t)}{T}\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{vT}\right)$$

avendo sostituito Δt con x/v nell'ultimo passaggio.

Qui è utile introdurre la grandezza, chiamata *lunghezza d'onda*, che rappresenta lo spazio λ percorso dalla perturbazione durante un periodo T. Per cui si ha evidentemente: $\lambda = vT$. Sostituendo vT con λ nella formula precedente si ottiene **l'equazione delle onde armoniche**:

(3) $$s(x,t) = s_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

> Notate che la formula (3) è stata ricavata per il caso particolare per cui lo spostamento è massimo al tempo t = 0 nel punto x = 0. Per generalizzarla, si può introdurre nell'argomento del coseno un termine costante additivo β. In tal modo lo spostamento al tempo t = 0 nel punto x = 0 diventa s_o cos al tempo t = 0 nel punto x = β.

che ci fornisce lo spostamento in funzione delle due variabili t e x. Questa espressione generale può essere specializzata assegnando un valore dato a una delle due variabili, per ottenere l'andamento dello spostamento in funzione dell'altra. Esaminiamo separatamente i due casi.

A un dato istante di tempo, cioè fissando il valore di t, la formula (3) esprime l'andamento degli spostamenti lungo la fune, cioè fornisce una "istantanea" dello stato della fune a quell'istante, come è rappresentato nel grafico della figura 11. La curva che si ottiene così ha forma sinusoidale, come del resto si verifica facilmente assegnando un valore costante a t nella formula (3): in questo caso, infatti, l'argomento del coseno dipende soltanto dall'ascissa x, dato che tutte le altre grandezze che vi figurano (t, T, λ) sono delle costanti.

Considerando invece un dato punto della fune, cioè fissando il valore di x, la formula (3) ne rappresenta lo spostamento in funzione del tempo. All'estremo della corda, dove x = 0, dalla (3) riotteniamo la (2). In un punto fisso generico di ascissa $x = x_0$, la (3) ci fornisce lo spostamento in funzione del tempo nella forma:

(4) $$s(x_0,t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_0}{\lambda}\right) = s_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} + \phi_0\right)\right)$$

dove abbiamo introdotto la *fase iniziale* $\phi_0 = -2\pi x_0/\lambda$. Tale espressione coincide con quella di un moto armonico (→ Unità 1), mostrando quindi che tale è il moto di tutti i punti della fune (beninteso se eccitata da un moto armonico).

Notate che l'equazione (3) rappresenta un'onda (*onda progressiva*) che si propaga nel verso positivo dell'asse x. E' poi chiaro che quando l'onda si propaga in senso opposto (*onda regressiva*), cioè nel verso negativo dell'asse x, basta cambiare da negativo a positivo il segno del termine x/λ.

I risultati precedenti, ottenuti per il moto trasversale dei punti di una fune dove si propaga un'onda armonica, sono validi per qualsiasi onda armonica che si propaga in una struttura unidimensionale in assenza di fenomeni di dissipazione di energia, rappresentando gli spostamenti trasversali nel caso di onde trasversali, gli spostamenti longitudinali nel caso di onde longitudinali. E sono validi anche per le onde rettilinee in due dimensioni e per le onde piane che si propagano in uno spazio a tre dimensioni, quando la posizione x è presa lungo un asse parallelo alla direzione di propagazione. Ma non sono validi per le onde circolari e per le onde sferiche i cui spostamenti seguono sì la legge armonica nel tempo, ma non nello spazio. Sapreste spiegare perché?

E le onde periodiche non armoniche? Non ce ne occupiamo per lo stesso motivo, l'esistenza del teorema di Fourier, per cui nell'Unità 1 non ci siamo occupati dei moti periodici non armonici. Infatti, dato che qualsiasi funzione periodica può essere rappresentata da una opportuna somma di funzioni sinusoidali, si capisce quando si propaga un'onda periodica non armonica, di forma qualsiasi, è come se si propagassero contemporaneamente più onde armoniche.

Esempio 2. Calcoliamo gli spostamenti di due punti di una fune in presenza di un'onda armonica.

In una fune si propaga un'onda trasversale descritta dall'equazione s(x,t) = 0,2 cos (20t – 0,5x), dove tutte le grandezze sono espresse in unità SI. Vogliamo calcolare il moto della fune nei punti x_1 = 0,5 m, x_2 = 6 m, e lo spostamento dei due punti al tempo t' = 0,5 s.

Applicando la formula precedente, otteniamo la legge oraria del moto nei due punti: $s(x_1,t)$ = 0,2 cos (20t – 0,5×0,5) = 0,2 cos (20t – 0,25); $s(x_2,t)$ = 0,2 cos (20t – 0,5×6) = 0,2 cos (20t – 3). In entrambi i casi si ha un moto armonico con pulsazione ω = 20 rad/s, ma con diversa fase iniziale. Al tempo t' = 2 s, gli spostamenti dei due punti sono:

$s(x_1,t')$ = 0,2 cos (20t' – 0,25) = 0,2 cos (20×0,5 – 0,25) = 0,2 cos 9,75 = -0,190 m;

$s(x_2,t')$ = 0,2 cos (20t' – 3) = 0,2 cos (20×0,5 – 3) = 0,2 cos 7 = 0,151 m.

Figura 9. Spostando rapidamente su e giù, una volta sola, l'estremità della fune, provochiamo un'onda impulsiva trasversale. La perturbazione si propaga con velocità costante mantenendo la sua forma, come mostrano le "fotografie"

della corda, riprese agli istanti di tempo successivi indicati dal cronometro (a); Queste immagini permettono di ricostruire l'andamento nel tempo della posizione verticale del punto della fune contrassegnato con il pallino nero.
(Adattare da Amaldi La Fisica, vol. 2, pag. 234; a) accorciando di ½ cm la corda subito a destra della mano, sostituendo le scritte 4,5,6,7, 8 con 5,6,7,8,9, sostituendo con maiuscole le lettere minuscole a,b,c,d,e; b) sostituendo le scritte: sull'asse verticale spostamento verticale del punto P, sull'asse orizzontale tempo t, estendendo la scala a 10 e spostando di una divisione a destra tutto il grafico)

Figura 10. Una forza esterna sposta l'estremo di una fune di moto armonico con periodo T. La curva sinusoidale rappresenta lo spostamento di questo punto in funzione del tempo.
(Adattare da Amaldi La Fisica, vol. 2, pag. 235; eliminando la scritta P fissato, sostituendo a con s_0, sostituendo spostamento di P, y con spostamento s(0, t); sostituendo istante, t con tempo t)

Figura 11. Una forza esterna sposta l'estremo di una fune di moto armonico con periodo T. La curva sinusoidale rappresenta lo spostamento dei punti della fune in funzione della loro posizione a un dato istante t' di tempo: una "istantanea" della fune ripresa a quell'istante.
(Adattare da Amaldi La Fisica, vol. 2, pag. 236; eliminando la scritta t fissato, sostituendo a con s_0, sostituendo la scritta spostamento, y con spostamento s(x, t'))

2.4 Le grandezze caratteristiche delle onde armoniche

Esaminiamo l'equazione (3) per individuare le grandezze che caratterizzano le onde armoniche.

- **Ampiezza.** L'*ampiezza* dell'onda è il coefficiente s_0, che rappresenta lo spostamento massimo rispetto al valore di equilibrio. Dato che lo spostamento può essere sia positivo che negativo nell'intervallo $-s_0$, s_0, la massima variazione totale di questa grandezza è $2s_0$.

- **Periodo, frequenza e pulsazione**. La periodicità nel tempo dell'onda è determinata dal *periodo* T, il cui reciproco è la *frequenza*

  $$f = 1/T = \omega/2\pi$$

  La costante ω rappresenta la *pulsazione* o *frequenza angolare* dell'onda. Le grandezze T, f e ω hanno lo stesso significato discusso trattando il moto armonico (→ Unità 1), e infatti il moto di qualsiasi punto investito dall'onda è un moto armonico, con legge oraria data dalla (3). Osserviamo che la frequenza (e quindi la pulsazione e il periodo) di un'onda dipendono dalla sorgente e non dal mezzo in cui essa si propaga.

- **Lunghezza d'onda.** La periodicità nello spazio dell'onda è determinata dalla *lunghezza d'onda* λ, che rappresenta lo spazio percorso dall'onda durante un periodo di oscillazione:

  (5) $$\lambda = vT = v/f$$

  E' importante osservare che la lunghezza d'onda dipende sia dalla frequenza, che è fissata dalla sorgente dell'onda, sia dalle proprietà del mezzo in cui essa viaggia, cioè la velocità di propagazione

- **Velocità di propagazione**. La *velocità di propagazione* v dell'onda non figura direttamente nella (3), dove però determina la lunghezza d'onda secondo la formula (5). Notate che la velocità di propagazione dipende dalla natura fisica dell'onda e dal mezzo in cui essa si propaga. Per esempio, la velocità nel vuoto nell'aria delle onde luminose e delle onde radio ($c \approx 300000$ km/s), è sei ordini di grandezza maggiore di quella delle onde sonore nell'aria.

Esempio 3. Calcoliamo la lunghezza di un'onda sonora e di un'onda luminosa.
Vogliamo calcolare la lunghezza d'onda a) di un'onda sonora della frequenza di 1000 Hz, sapendo che il suono si propaga nell'aria alla velocità $v_s = 340$ m, b) di un'onda luminosa di colore verde di frequenza $f_v = 5{,}6\cdot 10^{14}$ Hz.

Utilizzando la formula (5) otteniamo: a) la lunghezza d'onda del suono a 1000 Hz è $\lambda_s = v_s/f = 340/1000 = 0{,}34$ m; la lunghezza d'onda della luce verde a 1000 Hz è $\lambda_v = c/f_v = 3 \cdot 10^8 / 5{,}6 \cdot 10^{14} = 0{,}536\ \mu$m.

Esaminiamo ora il grafico in figura 12, che rappresenta lo spostamento dei punti in funzione della loro posizione a un dato istante di tempo. I punti dove a quell'istante lo spostamento è massimo si chiamano **creste** se lo spostamento è positivo (come C, C' e C''), **valli** se lo spostamento è negativo (come V, V' e V''). I punti dove, a un medesimo istante, gli spostamenti sono uguali (come P ed R, oppure come le creste o le valli) si dicono **in fase**; i punti dove gli spostamenti hanno lo stesso modulo ma segni opposti (come P e Q) si dicono **in opposizione di fase**. Dove qui per "fase" s'intende l'argomento della funzione coseno che figura nell'equazione delle onde armoniche (3), cioè $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Si capisce che perché due punti x_1 e x_2 abbiano lo stesso spostamento a un dato istante t', cioè sia $s(t', x_1) = s(t', x_2)$, deve valere l'uguaglianza

$$2\pi\left(\frac{t'}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=2\pi\left(\frac{t'}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)$$

Questa è verificata quando i due punti distano di un numero intero k di lunghezze d'onda, cioè $|x_1 - x_2| = k\lambda$, come appunto si osserva nel grafico di figura 12. L'uguaglianza precedente, d'altra parte, se è verificata all'istante t' lo è anche a qualsiasi altro istante, sicché concludiamo che *tutti i punti di un'onda fra loro in fase, che distano fra loro di un numero intero di lunghezze d'onda, oscillano con la stessa legge oraria.* Cioè vibrano all'unisono, per dirla in termini musicali.

E i punti in opposizione di fase? Perché a un dato istante due punti abbiano spostamenti uguali e opposti, occorre che i corrispondenti argomenti della funzione coseno nella (3) siano a loro volta uguali e opposti. Questa condizione è verificata quando i due punti distano fra loro di mezza lunghezza d'onda o di un numero intero di mezze lunghezze d'onda, come si osserva nel grafico di figura 12.

- **Energia.** Sappiamo che l'energia di un oscillatore armonico è direttamente proporzionale al quadrato dello spostamento massimo e al quadrato della pulsazione (→ Unità 1, formula (15)). Lo stesso avviene per l'energia di qualsiasi tipo di onda, intendendo ora lo "spostamento" in termini generali, cioè come ampiezza della perturbazione che costituisce l'onda (che naturalmente rappresenta un effettivo spostamento nel caso delle onde che si propagano lungo una fune o una sbarra). Per esempio: l'intensità di un suono (l'energia di un'onda sonora) è proporzionale al quadrato dell'ampiezza della perturbazione acustica; l'intensità della luce (l'energia di un'onda luminosa) è proporzionale al quadrato dell'ampiezza della perturbazione elettromagnetica. Diciamo perciò che *l'energia immagazzinata in un'onda è direttamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza massima e al quadrato della pulsazione.* Nel prossimo capitolo ricaveremo l'espressione completa dell'energia per alcuni tipi particolari di onde meccaniche.

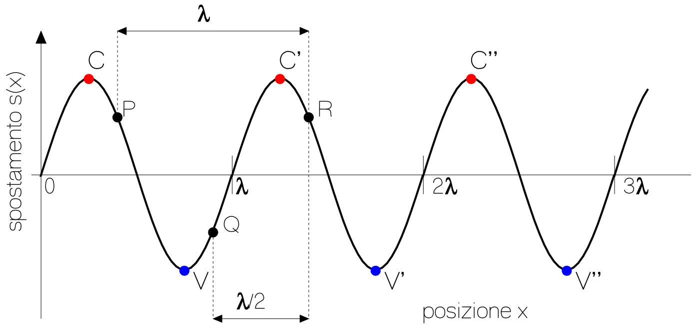


Figura 12. Il grafico rappresenta lo spostamento dei punti in funzione della loro posizione a un dato istante di tempo per un'onda armonica. I punti C, C' e C" sono chiamati *creste*; i punti V, V' e V" sono chiamati *valli.* Notate che gli spostamenti dei punti P e R, che distano di una lunghezza d'onda, sono i medesimi, mentre quelli dei punti Q e R, che distano di mezza lunghezza d'onda hanno lo stesso modulo ma segni opposti.

2.5 Principio di sovrapposizione e interferenza

Il principio di sovrapposizione degli effetti

Lanciamo due onde impulsive in una fune, muovendone bruscamente gli estremi. Queste si propagheranno lungo la fune, viaggiando in sensi opposti, come avviene per due treni che corrono l'uno verso l'altro su uno stesso binario. Ma le onde, a differenza dei treni o di qualsiasi altro oggetto materiale, non si "scontrano". Esse infatti, come illustra la sequenza di immagini nella figura 13, si attraversano l'una l'altra, proseguendo sul loro percorso come se niente fosse, cioè senza subire modifiche. Più precisamente: senza interagire fra loro. Sicchè, *a ogni istante, lo spostamento complessivo di ogni punto della fune è dato dalla somma algebrica degli spostamenti che le due onde avrebbero prodotto separatamente*, cioè ciascuna delle due in assenza dell'altra. In questa proprietà additiva consiste il **principio di sovrapposizione degli effetti delle onde**.

Il fenomeno della sovrapposizione di onde senza interazione è verificato assai spesso, sebbene non sempre (→Approfondimento 2). Esso si verifica, per esempio, quando udiamo più persone che parlano contemporaneamente o quando, ascoltando della musica, ci accorgiamo che squilla un telefono, percependone il suono come se il telefono agisse separatamente dal resto (beninteso, fintanto che il suo squillo non viene "coperto" da suoni assordanti). E si verifica anche nella nostra radio, che è investita dalle onde provenienti da un gran numero di stazioni trasmittenti, fra le quali possiamo selezionare il programma desiderato, ascoltandolo poi senza interferenze.

Notiamo infine che la rappresentazione di un'onda periodica non armonica come somma di onde armoniche, utilizzando il teorema di Fourier, è possibile soltanto quando è verificato il principio di sovrapposizione.

Approfondimento 2. Il principio di sovrapposizione degli effetti e la linearità di risposta.

Il principio di sovrapposizione degli effetti è una conseguenza della linearità di risposta di determinati oggetti fisici. Questo discorso si capisce facendo un semplice esempio, cioè considerando una molla "onesta", la cui *risposta è lineare nell'eccitazione*, più precisamente la risposta della molla (lo spostamento dell'estremo sollecitato) è direttamente proporzionale all'eccitazione (l'intensità della forza applicata): $x = -F/k$, dove k è costante elastica. Cioè quando alla molla applichiamo una forza di intensità F_1, il suo estremo si sposta di $x_1 = -F_1/k$; quando la forza ha intensità F_2, lo spostamento è $x_2 = -F_2/k$. E quindi è chiaro che quando applichiamo assieme le due forze, cioè una forza di intensità pari alla somma delle due intensità, lo spostamento non è altro che la somma dei due spostamenti prodotti separatamente dalle due forze. Cioè vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Che cosa succede, invece, se la molla non è lineare? Che quanto abbiamo appena detto non è più vero. Fra le infinite molle non lineari, consideriamo quelle per cui $x = -(aF + bF^2)$, dove a e b sono due costanti positive. In tal caso lo spostamento provocato da una forza di intensità $F_1 + F_2$ è $x = -(a(F_1 + F_2) + b(F_1 + F_2)^2)$, ed è immediato verificare che non si tratta affatto della somma dei due spostamenti prodotti separatamente dalle due forze. Cioè per questa molla il principio di sovrapposizione degli effetti non vale. E alla stessa conclusione si arriva considerando una molla governata da una qualsiasi altra legge non lineare.

In molti casi pratici, tuttavia, il principio di sovrapposizione degli effetti può essere verificato approssimativamente, anche per sistemi non lineari, quando le eccitazioni, e quindi le risposte, sono relativamente piccole. Nel caso della molla considerata prima, per esempio, può darsi che le intensità delle due forze siano sufficientemente piccole da rendere trascurabile, o comunque di modesta entità, il termine non lineare dello spostamento ($b(F_1 + F_2)^2$) rispetto a quello lineare ($a(F_1 + F_2)$. E in tal caso il principio di sovrapposizione, sebbene solo approssimativamente, resta verificato.

Si capisce che quanto detto fin qui per lo spostamento di una molla soggetta a una forza si estende naturalmente al caso delle perturbazioni che costituiscono un'onda, eccitate da una sorgente. La matematica si complica, ma il succo del discorso resta tale e quale.

I fenomeni di interferenza

Quando due o più onde attraversano una stessa regione di spazio sovrapponendosi senza interagire, e dunque vale il principio di sovrapposizione, esse tuttavia danno luogo a fenomeni di **interferenza.** Di questo possiamo farci subito un'idea osservando le onde prodotte gettando due sassi in uno stagno, come mostrato in figura 15. Quando le due onde s'incontrano, vi sono punti dove le creste s'innalzano, altri dove si abbassano o addirittura si cancellano.

Esaminiamo il fenomeno dell'interferenza più in dettaglio considerando due onde armoniche che si propagano in un mezzo con la stessa velocità e nella stessa direzione, ma in versi opposti; per esempio lungo la solita fune. Un caso particolarmente interessante, perché l'interferenza si manifesta più vistosamente, è quello di onde che hanno la stessa ampiezza e la stessa frequenza, e quindi anche la stessa lunghezza d'onda. Le due onde, come sappiamo, viaggiano mantenendo la propria identità, sicchè a ogni istante gli spostamenti complessivi, per il principio di sovrapposizione, sono la somma, punto per punto, di quelli che competono a ciascuna onda separatamente. La figura 16 mostra quanto avviene a tre istanti diversi, due dei quali illustrano situazioni particolari. Più precisamente, la parte a) rappresenta un istante in cui le due onde sono in *opposizione di fase*. Il risultato prende il nome di **interferenza distruttiva**, perché gli spostamenti sono nulli ovunque. Ma le onde non sono sparite, perchè negli istanti successivi esse riemergono dal nulla. Fino a quando (parte c) esse vengono a trovarsi *in fase*, e allora si osserva un'onda di ampiezza doppia, perché le ampiezze massime delle due onde si sommano. Questa situazione prende il nome di **interferenza costruttiva**.

Un altro caso interessante è quello dell'interferenza fra due onde armoniche con la stessa ampiezza e la stessa frequenza, ma fasi diverse, che si propagano in un mezzo nella stessa direzione e nello stesso verso. In tutti i punti del mezzo l'effetto è quello della sovrapposizione di due moti armonici. Chiamando ϕ la differenza fra le fasi delle due onde, consideriamo un punto nel quale lo spostamento risultante dal passaggio delle due onde possa essere scritto nella forma:

E negli altri punti? Per essi negli argomenti dei coseni che figurano nell'espressione (6) andranno aggiunti due termini uguali per rappresentarne correttamente le fasi iniziali. I conti si complicano un po', ma il risultato non cambia.

(6) $$s(t) = s_0 \cos(\omega t) + s_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Utilizzando l'identità trigonometrica $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos((\alpha + \beta)/2))\cos((\alpha - \beta)/2)$, otteniamo:

(7) $$s(t) = 2s_0 \cos(\phi/2) \cos(\omega t + \phi/2)$$

cioè lo spostamento complessivo è un moto armonico della stessa frequenza delle due onde, con fase iniziale pari a metà dello sfasamento fra esse e ampiezza

(8) $$2s_0 \cos(\phi/2)$$

che in valore assoluto può variare fra zero e il doppio dell'ampiezza delle singole onde. Notate che questa ampiezza dipende fortemente dallo sfasamento ϕ fra le due onde. In particolare si ha *interferenza distruttiva*, cioè ampiezza nulla, quando $\phi = \pi$ (più in generale per $\phi = (2k +1)\pi$, con k intero), *interferenza costruttiva*, cioè ampiezza doppia, quando $\phi = 0$ (più in generale per $\phi = 2k\pi$, con k intero).

Figura 13. Due onde impulsive si propagano lungo una fune viaggiando in sensi opposti, senza interagire quando s'incontrano. Le curve continue rappresentano la forma complessiva della fune a istanti di tempo successivi, le curve tratteggiate rappresentano le singole onde.
(Adattare da il Mondo della Fisica, tomo B, pag. 530)

Figura 14. I fasci luminosi lanciati nel cielo dai riflettori si attraversano senza interagire. Ciascun fascio prosegue infatti indisturbato il suo percorso.

(fotografia da trovare: fasci di riflettori, di notte, che si intersecano nel cielo di una città)

Figura 15. Onde circolari prodotte lanciando due sassi in uno stagno: nella regione in cui le due onde s'incontrano, sovrapponendosi, si producono fenomeni di *interferenza*.
(foto da trovare delle onde prodotte lanciando due sassi in uno stagno, con buona visibilità della regione in cui le onde si sovrappongono)

Figura 16. Due onde armoniche (1) e (2) di uguale ampiezza e lunghezza d'onda (disegnate a tratteggio) si propagano in versi opposti lungo una fune. La forma della fune (a tratto pieno) è rappresentata a tre istanti diversi: a) quando le due onde sono in opposizione di fase e si ha *interferenza distruttiva*; b) a un istante generico, c) quando le due onde sono in fase e si ha *interferenza costruttiva* (qui, per chiarezza, le due onde non sono state disegnate esattamente in fase)
(adattare da il Mondo della Fisica, tomo B, pag. 531 con le seguenti modifiche: scambiare fra loro le parti a) e b); eliminare le indicazioni relative ai punti Q1, Q2, R1,R2; eliminare le scritte (1) e (2) apposte alle onde tratteggiate; portare nei colori corrispondenti alle onde tratteggiate le scritte apposte alle frecce e le frecce stesse).

Figura 17. Collegando all'amplificatore un secondo altoparlante il suono si riduce fortemente. Come mai? Evidentemente è stato fatto un errore: anziché collegarlo in fase, il secondo altoparlante è stato collegato in modo che il suo suono sia in opposizione di fase rispetto all'altro, creando così un'interferenza distruttiva. Come si risolve il problema? Invertendo i collegamenti elettrici a uno dei due altoparlanti.
(vignetta da fare)

2.6 Fronti d'onda e principio di Huygens

Consideriamo un'onda che si propaga in un mezzo bidimensionale, come le onde sulla superficie del mare, oppure tridimensionale, come la luce prodotta accendendo un fiammifero. I diversi punti che l'onda raggiunge a un dato istante oscillano evidentemente tutti assieme, costituendo un *fronte d'onda***.** Generalmente, *si chiamano **fronti d'onda** i luoghi geometrici formati da tutti i punti vicini che oscillano in fase con ampiezza massima*, cioè corrispondente a una cresta dell'onda. Questi luoghi geometrici sono linee curve nel caso delle onde che si propagano su una superficie: in particolare, cerchi nel caso delle onde circolari, rette per le onde rettilinee. Si tratta invece di superfici nel caso delle onde che si propagano in tre dimensioni: in particolare superfici sferiche nel caso delle onde sferiche, piani per le onde piane.

Qualsiasi retta perpendicolare a un fronte d'onda, orientata nel verso di propagazione dell'onda, costituisce un **raggio**. Si capisce che i raggi delle onde sferiche o circolari sono rette divergenti; quelli delle onde rettilinee o piane sono rette parallele. Il concetto di raggio, come vedremo, risulta particolarmente utile per trattare i fenomeni luminosi, e del resto la nozione di "raggio di luce" rientra nella conoscenza comune più elementare.

Osserviamo ora che lo studio della propagazione delle onde in uno "spazio libero", siano esse sferiche o piane in tre dimensioni oppure circolari e rettilinee in due dimensioni, è relativamente semplice. Non così in presenza di ostacoli, per esempio quando un fascio di luce incontra una superficie con un foro oppure le onde del mare investono il molo di un porto. Lo studio di questi fenomeni, che discuteremo nel prossimo paragrafo, è grandemente facilitato dal *principio di Huygens*, che lo scienziato olandese Christiaan Huygens (1629-1695) introdusse nell'opera *Traité de la lumière*, pubblicata nel 1690. Lo studio di Huygens riguardava la luce, sostenendo l'ipotesi questa avesse natura ondulatoria anziché corpuscolare come riteneva invece Newton, ma le considerazioni alla base del suo principio sono valide in generale per onde di qualsiasi natura fisica.

Il **principio di Huygens** afferma che: *a) ogni punto di un fronte d'onda si comporta come una sorgente secondaria di onde sferiche, con la stessa frequenza dell'onda di origine, b) il fronte d'onda successivo è dato dall'inviluppo di queste onde secondarie, cioè dalla superficie tangente a ciascuna di esse.* E' l'interferenza fra le onde secondarie, in altre parole, a creare il nuovo fronte d'onda.

Esaminiamo ora l'impiego del principio di Huygens, utilizzandolo per risolvere due problemi di cui già conosciamo la soluzione, cioè per stabilire la propagazione di un'onda piana e di un'onda sferica. Il procedimento è illustrato nella figura 19, dove in un piano in cui giace la direzione di propagazione è rappresentata la traccia dei fronti d'onda delle due onde a un generico istante t. I punti rossi sui fronti d'onda indicano le sorgenti secondarie da cui s'irraggiano onde sferiche, che all'istante t + Δt raggiungono i cerchietti tratteggiati, tutti aventi raggio λ = v Δt, dove v è la velocità di propagazione. L'inviluppo di questi cerchietti costituisce il nuovo fronte d'onda a t + Δt: una retta, che rappresenta il fronte dell'onda piana, a distanza vΔt dal fronte d'onda precedente; un cerchio di raggio r + v Δt, che rappresenta il fronte dell'onda sferica, a distanza v Δt dal precedente di raggio r.

Avrete notato che in quanto sopra abbiamo esteso la definizione di fronti d'onda data all'inizio del paragrafo, considerando infatti come tali i luoghi geometrici formati da tutti i punti vicini che oscillano in fase, a prescindere dalla loro ampiezza. Perché il principio di Huygens vale anche per essi.

Approfondimento 3. Il principio di Huygens.
Il principio di Huygens permette di studiare, sia pure in termini qualitativi, molti fenomeni che riguardano la propagazione delle onde; in particolare quelli, come la riflessione e la rifrazione, che si verificano quando esse incontrano degli ostacoli oppure passano da un mezzo avente determinate caratteristiche a un altro con caratteristiche diverse. Gli sviluppi matematici del principio di Huygens, che qui non trattiamo, si devono soprattutto a Fresnel, nell'Ottocento.

Facciamo però attenzione. Non è affatto vero che ogni punto investito da un'onda si comporta a sua volta come sorgente di una nuova onda: infatti a questo proposito è stato scritto, giustamente, che "la luce non genera luce". Tutto avviene però come se ciò fosse, e questo è il modo corretto di interpretare il principio di Huygens, senza affrontarne gli aspetti matematici, come infatti faremo nel seguito.

Notiamo infine che applicando il principio di Huygens, come per esempio è illustrato nella figura 19, sembrerebbe che la perturbazione debba propagarsi, oltre che in avanti, anche all'indietro, perché possiamo tracciare un secondo inviluppo, appunto all'indietro, dei fronti delle onde secondarie. Questo punto è stato discusso da molti scienziati. Per quanto ci riguarda, ci limiteremo sempre a considerare soltanto la propagazione in avanti, cioè nella direzione di propagazione dell'onda, perché è quella che ha senso fisico in quanto rappresenta ciò che avviene realmente.

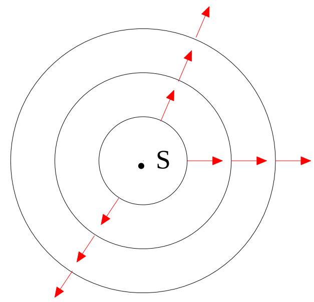


Figura 18. Fronti d'onda e raggi sono usati spesso per visualizzare efficacemente la propagazione di un'onda. Nella figura sono indicati in nero alcuni fronti d'onda e in rosso alcuni raggi relativi alle onde circolari che si propagano sulla superficie di uno specchio d'acqua che è stato eccitato in un punto.

Figura 19. Applicazione del principio di Huygens per stabilire la propagazione di un'omda piana (a) e di un'onda circolare (b). Sono rappresentati i fronti d'onda all'istante t, dove i pallini rossi indicano le sorgenti secondarie, e all'istante t + Δt, ottenuti come inviluppo delle onde secondarie.
(Adattare da Bergamaschini, Volume D, pag. 66; a) la figura 3.13a, modificata eliminandone la parte a sinistra, ma riportandone le scritte sul resto, sostituendo t_1 con t + Δt; b) la figura 3.14, sostituendo la scritta t = 0 con t. Inoltre uniformando gli stili delle due parti, riducendo a 8 il numero dei pallini rossi, tracciando in entrambe delle frecce blu (anziché verdi), tracciando in entrambe cerchietti completi e di ugual raggio, in entrambe sostituendo la scritta fronte al tempo t=0 con fronte al tempo t)

2.7 Alcuni fenomeni caratteristici delle onde

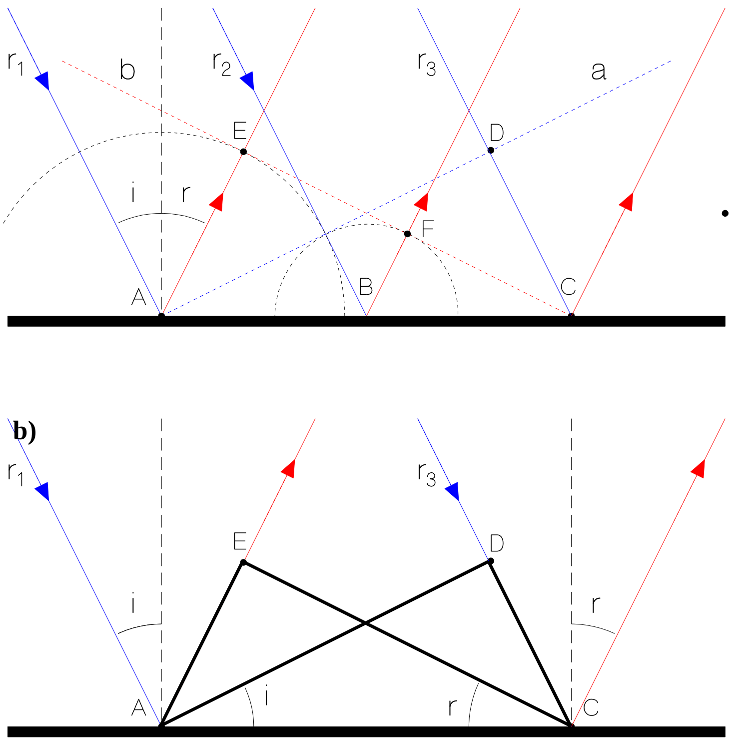
In questo paragrafo esaminiamo alcuni fenomeni caratteristici che si manifestano in particolari situazioni, cioè quando le onde incontrano degli ostacoli oppure il mezzo in cui si propagano non è omogeneo. Questi fenomeni, che derivano da proprietà generali delle onde e perciò non dipendono dalla loro particolare natura fisica, hanno grande importanza concettuale e pratica al tempo stesso. Per esempio: sul fenomeno della *riflessione* è basato il funzionamento dei radar, che garantiscono un atterraggio sicuro agli aerei anche in assenza di visibilità; sul fenomeno della *rifrazione* è basato il funzionamento degli occhiali e della maggior parte degli strumenti ottici; il fenomeno della *diffrazione* permette di spiegare perché i suoni possano aggirare gli ostacoli.

I fenomeni caratteristici delle onde possono essere studiati usando un *ondoscopio,* cioè una vaschetta d'acqua nella quale una o più sorgenti periodiche possono agire contemporaneamente e in cui si possono disporre agevolmente varie forme di ostacoli. Questo apparecchio è generalmente dotato di un sistema di illuminazione che facilita l'osservazione delle onde.

La riflessione

Una parete rocciosa riflette i suoni; uno specchio riflette un fascio luminoso; l'onda che si propaga in una fune torna indietro quando ne incontra l'estremità fissata a un sostegno. In generale, *quando un'onda incontra un'ostacolo subisce il fenomeno della riflessione*. L'ampiezza dell'onda riflessa, tuttavia, dipende dalla natura dell'ostacolo, oltre che da quella dell'onda. Quando l'ostacolo assorbe tutta o in parte l'energia dell'onda incidente, l'onda riflessa ha ampiezza piccola o addirittura nulla. Altrimenti, cioè quando l'energia si conserva, l'ampiezza dell'onda riflessa è uguale a quella dell'onda incidente, come avviene, con ottima approssimazione, quando uno specchio riflette la luce. Vi sarete resi conto che il fenomeno della riflessione, sebbene riguardi onde e dunque non vi sia moto di materia, presenta molte somiglianze con quello dell'urto (→ Tomo A, pag. xxx), e altre ancora ne individueremo presto.

fig. 20 a)



La riflessione di un'onda da parte di un ostacolo può essere studiata impiegando il principio di Huygens, come è mostrato nella figura 20 per un'onda piana che investe una parete riflettente piana. I raggi (blu) dell'onda incidente formano l'angolo i rispetto alla normale alla parete riflettente; i raggi (rossi) dell'onda riflessa formano l'angolo r rispetto alla normale. La retta tratteggiata a nella parte a) della figura 20 rappresenta la traccia del fronte dell'onda incidente, all'istante t in cui il raggio r_1 raggiunge la parete nel punto A. In seguito, mentre il raggio r_3 percorre il tratto DC raggiungendo la parete al tempo t + Δt, l'onda sferica secondaria emessa nel punto A se ne allontana a distanza $\overline{AE}$ pari a $\overline{DC}$. Allo stesso istante t+Δt, inoltre, l'onda secondaria emessa dal punto B, intermedio fra A e C e da essi equidistante, ha percorso la distanza $\overline{BF}$ pari a $\overline{DC}/2$. Le tracce dei fronti di queste onde secondarie sono rappresentate dalle circonferenze tratteggiate con centro, rispettivamente, in A e B. La retta tratteggiata b, tangente ad esse, costituisce la traccia, al tempo t + Δt, del fronte dell'onda riflessa. I raggi riflessi sono individuati dalle rette perpendicolari a b passanti per i punti di riflessione.

Dalla costruzione precedente si ricava una importante proprietà della riflessione delle onde: *l'angolo di riflessione è uguale a quello di incidenza*, cioè

(8) $$r = i.$$

Questa legge si dimostra esaminando la parte b) della figura 20: i due triangoli rettangoli AEC e ADC sono uguali, avendo l'ipotenusa AC in comune ed essendo uguali i cateti AE e CD.

E' chiaro che allo stesso risultato (8) si arriva anche considerando l'urto elastico di una pallina contro una parete. Sicché possiamo dire che le onde, quando trovano un ostacolo, "rimbalzano". Questo si osserva bene nella parte a) della figura 21, dove le onde circolari emesse dalla sorgente puntiforme rimbalzano contro la parete dell'ondoscopio, creando interferenza. La parte b) della figura mostra poi che le onde circolari riflesse da una parete piana sembrano provenire da una sorgente fittizia, chiamata *sorgente immagine*, situata al di là della barriera.

Ma che dimensioni deve avere un ostacolo perché si verifichi il fenomeno della riflessione? La scala di riferimento è fissata dalla lunghezza d'onda dell'onda incidente. Un ostacolo si comporta effettivamente come una parete quando è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda. E quindi uno specchio di qualche cm riflette in modo eccellente la luce (con lunghezze d'onda dell'ordine di una frazione di μm), ma è un pessimo riflettore per i suoni (con lunghezze d'onda dell'ordine dei centimetri o dei metri). Quando poi le dimensioni dell'ostacolo sono dell'ordine della lunghezza d'onda o inferiori prevalgono i fenomeni di diffrazione di cui ci occuperemo subito.

Applicazioni tecniche 1. Il radar, il lidar e il sonar.
Il *radar*, il *lidar* e il *sonar* sfruttano il fenomeno della riflessione di onde impulsive per rivelare la presenza di un bersaglio, misurare la distanza a cui esso si trova e anche determinarne la velocità. L'onda impulsiva, emessa dalla sorgente a un certo istante, viene riflessa dal bersaglio e ritorna al punto di partenza dopo un intervallo di tempo Δt. Sicché la distanza del bersaglio dalla sorgente, che l'onda percorre due volte, è: $d = \Delta t\ v/2$, dove v è la velocità (nota) a cui l'onda si propaga. Inviando due impulsi a tempi diversi, si può misurare come varia nel tempo la distanza del bersaglio e determinarne quindi la velocità.

La tecnica **radar**, così denominata dall'inglese *radio detection and ranging* che significa "rivelazione e misura della distanza mediante onde radio", ha avuto origine per scopi militari: rivelare la presenza di aerei avversari. Ma essa trova oggi un gran numero di impieghi in campo civile, fra cui l'atterraggio strumentale, che consente in piena sicurezza l'atterraggio di un aereo anche in condizioni di visibilità nulla, la *collision avoidance* (prevenzione di collisioni) fra veicoli in moto (aerei, navi e in futuro anche autoveicoli), lo studio delle perturbazioni atmosferiche in meteorologia, la determinazione della velocità dei veicoli in autostrada da parte delle forze dell'ordine, … I radar utilizzano microonde, cioè onde radio di altissima frequenza (GHz) e piccola lunghezza d'onda (dell'ordine del decimetro), che è possibile inviare in direzioni prestabilite nella forma di fasci di piccola apertura angolare.

Il **lidar** (da *light detection and ranging*) utilizza invece onde luminose o altre onde elettromagnetiche, con lunghezze d'onda fra una frazione di μm e qualche μm, nella forma di fasci laser molto sottili. Diventa possibile, così, individuare bersagli anche di dimensioni relativamente piccole e infatti questa tecnica trova impiego nello studio delle particelle inquinanti contenute nell'atmosfera, oltre che, più in generale, nelle indagini meteorologiche. Un impiego particolare del lidar riguarda poi la misura di distanze con altissima precisione, per esempio le variazioni nel tempo fra due riferimenti sulla superficie terrestre dovuti ai lenti spostamenti di una zolla rispetto a un'altra, che a volte poi sfociano in un terremoto.

Il **sonar** utilizza invece onde sonore. A bordo delle navi da guerra, il sonar permette di individuare i sottomarini avversari, mine e ostacoli. Ma la possibilità di "vedere sott'acqua" è preziosa anche in molte applicazioni civili, per esempio nei pescherecci per rivelare la presenza di banchi di pesci e in generale per misurare la profondità del mare.

Figura da trovare: lidar atmosferico o lidar per misure a cavallo della faglia di San Andrea o ecoscandaglio

La diffrazione

Il fenomeno della **diffrazione** si verifica quando l'ostacolo non costituisce una barriera totale e allora le onde lo aggirano o penetrano nelle sue aperture, prendendo il nome di *onde diffratte*. Un classico esempio di questo fenomeno è mostrato nella figura 22, che rappresenta la diffrazione delle onde marine (rettilinee) da parte della barriera costituita dal molo di un porticciolo: le onde diffratte penetrano infatti nel porto nella forma di onde (approssimativamente) circolari, come prevede il principio di Huygens per le onde secondarie emesse dal punto all'estremità del molo.

La diffrazione di un'onda rettilinea in presenza di ostacoli è illustrata nella figura 23, dove le onde diffratte sono ottenute applicando il principio di Huygens. Si vede che la forma delle onde diffratte dipende in modo essenziale dal rapporto fra la lunghezza d'onda e le dimensioni dell'ostacolo o delle sue aperture. In particolare, da una apertura piccola rispetto alla lunghezza d'onda emerge un'onda approssimativamente circolare (→ parte a)); da una apertura grande, un'onda approssimativamente rettilinea (→ parte b)).

Quindi le onde che emergono da un foro di date dimensioni hanno forma assai diversa a seconda che si tratti di onde luminose, con lunghezze d'onda di frazioni di μm, o di onde sonore, con lunghezze d'onda da qualche cm a qualche m. Attraverso un foro di 1 cm, per esempio, la luce passa senza apprezzabile diffrazione, creando un fascio luminoso circondato da una zona d'ombra; un'onda sonora, invece, è fortemente diffratta, emergendo tutt'attorno nella forma di onde sferiche.

La rifrazione

Perché le onde del mare, che in mare aperto possono avere qualsiasi direzione, quando si avvicinano a una costa, comunque spiri il vento, arrivano sempre in direzione perpendicolare alla riva? Il motivo è che nelle acque meno profonde le onde si propagano più lentamente sicché, avvicinandosi alla costa, esse subiscono il fenomeno della **rifrazione**, che ne modifica la direzione. Questo fenomeno si verifica tutte le volte che un'onda passa da un mezzo a un altro, in cui la sua velocità di propagazione è diversa, oppure si propaga in un mezzo non omogeneo, nel quale questa velocità non è costante. Nel passaggio fra due mezzi diversi, per esempio quando un raggio di luce passa dall'aria al vetro di una lente, il cambiamento di direzione avviene bruscamente, mentre invece avviene gradualmente quando le proprietà del mezzo variano gradualmente, come nel caso delle onde marine che si avvicinano alla costa.

La figura 24 mostra la brusca deviazione dei fronti d'onda, e quindi anche della direzione di propagazione, che si verifica quando un'onda rettilinea passa da un mezzo (1) a un altro (2), nei due casi in cui la velocità di propagazione nel secondo mezzo è minore ($v_2 < v_1$ nella parte a)) oppure maggiore del primo ($v_2 > v_1$ nella parte b)). Nel passaggio fra i due mezzi la frequenza dell'onda resta invariata, sicchè quando cambia la velocità di propagazione, ricordando che $\lambda = vf$, cambia corrispondentemente la lunghezza d'onda, che nella figura rappresenta la distanza fra i fronti d'onda successivi nei due mezzi. Quando la velocità diminuisce, e con essa la lunghezza d'onda, i fronti d'onda che emergono dalla discontinuità diventano "più paralleli" alla superficie di separazione di quelli incidenti (parte a); nel caso opposto, sebbene sempre rettilinei, essi diventano "meno paralleli" (parte b).

La figura 25, che rappresenta schematicamente la situazione già illustrata nella parte a) della figura 24, permette di ricavare la legge della rifrazione. Per i due triangoli rettangoli ADC e AEC si può scrivere infatti:

$$\overline{DC} = \overline{AC}\,\mathrm{sen}\,i \qquad \overline{EA} = \overline{AC}\,\mathrm{sen}\,r$$

e quindi

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{EA}} = \frac{\mathrm{sen}\,i}{\mathrm{sen}\,r}$$

Ma le lunghezze $\overline{DC}$ e $\overline{EA}$ sono rispettivamente uguali alle lunghezze d'onda λ_1 e λ_2, a loro volta direttamente proporzionali alle velocità di propagazione v_1 e v_2. Sostituendo nella precedente si ottiene così la **legge della rifrazione:**

(9) $$\frac{\mathrm{sen}\,i}{\mathrm{sen}\,r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

che lega l’angolo di incidenza i (fra la direzione dei raggi incidenti e la normale alla superficie di separazione) e l’angolo di rifrazione r (fra la direzione dei raggi rifratti e la normale alla superficie di separazione) con le velocità di propagazione delle onde nei due mezzi.

Figura 20. a) Un’onda piana investe una parete riflettente piana. L’onda riflessa si ricava applicando il principio di Huygens, cioè individuando le onde secondarie emesse dai punti della parete quando sono raggiunti dall’onda incidente. b) L’angolo di riflessione (r) è uguale a quello di incidenza (i) per l’uguaglianza dei triangoli rettangoli AEC e ADC che hanno in comune l’ipotenusa AC e i cateti uguali.

Figura 21. a) Le onde circolari generate da una sorgente puntiforme periodica rimbalzano contro una parete rettilinea dell’ondoscopio. Si crea così interferenza fra le onde dirette e quelle riflesse. b) Schematizzazione del fenomeno: le onde riflesse (tratteggiate) sembrano provenire dalla sorgente S’, posta nel punto simmetrico di S rispetto alla parete riflettente. Proprio come avviene quando uno specchio riflette la luce. (parte a) fotografia di ondoscopio da trovare; parte b) adattare da Mondo della Fisica, vol. B, pag. 534, fig. 18)

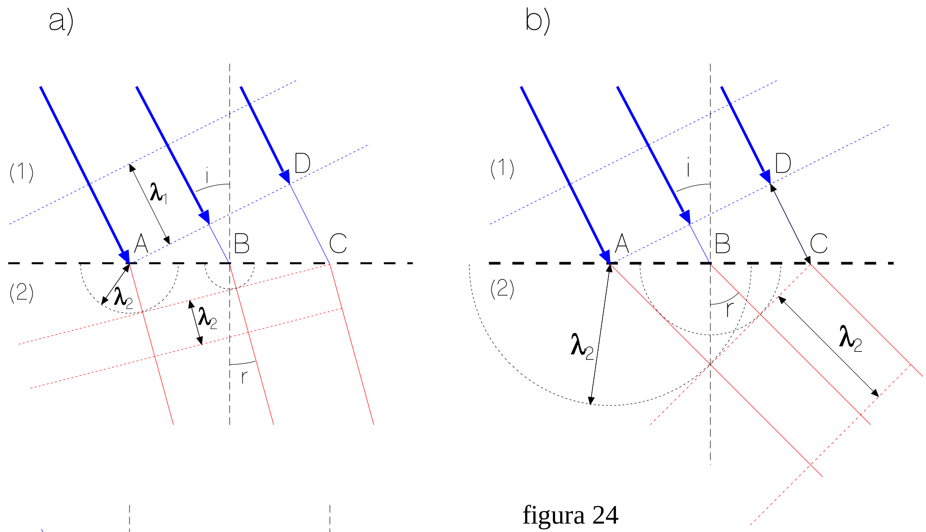


figura 24

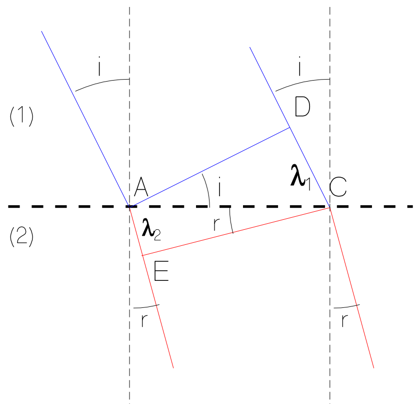


figura 25

Figura 22. Un classico esempio di diffrazione: le onde del mare aggirano il molo penetrando nel porticciolo. Il meccanismo è lo stesso per cui possiamo udire i suoni anche quando non siamo in vista della sorgente. (fotografia come in Mondo della Fisica, vol. B, pag. 534)

Figura 23. Il principio di Huygens permette di stabilire la forma delle onde diffratte: a) quando esse attraversano un’apertura piccola rispetto alla loro lunghezza d’onda; b) quando esse attraversano un’apertura grande rispetto alla loro lunghezza d’onda; c) quando incontrano un ostacolo di dimensioni piccole rispetto alla loro lunghezza d’onda; d) quando incontrano un ostacolo di dimensioni grandi rispetto alla loro lunghezza d’onda.
(adattare da Bergamaschini, vol. D, pag. 69; invertendo le parti a) e b) e quelle c) e d); nella ex parte c) ???)

Figura 24. Fenomeno della *rifrazione*. L’onda cambia direzione quando passa dal mezzo (1) al mezzo (2), dove la velocità di propagazione e la lunghezza d’onda sono diverse, cioè l’angolo fra i raggi rifratti e la normale alla superficie di separazione (angolo di rifrazione r) è diverso da quello fra i raggi incidenti e la normale (angolo di incidenza i). a) Nel mezzo (2) l’onda si propaga più lentamente ($v_2 < v_1$, e quindi $\lambda_2 < \lambda_1$). Nell’intervallo di tempo in cui il raggio r_2 percorre il tratto DC, di lunghezza λ_1, l’onda emessa dal punto A, più lenta, avanza di $\lambda_2 < \lambda_1$. Sicché il fronte d’onda che si crea nel mezzo (2) risulta meno inclinato rispetto alla superficie di separazione dei mezzi. b) Nel mezzo (2) l’onda si propaga più velocemente ($v_2 > v_1$, e quindi $\lambda_2 > \lambda_1$). Nell’intervallo di tempo in cui il raggio r_2 percorre il tratto DC, di lunghezza λ_1, l’onda emessa dal punto A, più veloce, avanza di $\lambda_2 > \lambda_1$. Sicché il fronte d’onda che si crea nel mezzo (2) risulta più inclinato rispetto alla superficie di separazione dei mezzi.

Figura 25. Semplificando la figura 24 a), relativa al passaggio da un mezzo a un altro dove la lunghezza d'onda è minore, si ricava la *legge della rifrazione*, che lega gli angoli di incidenza (i) e di rifrazione (r) alle lunghezze d'onda e quindi alle velocità di propagazione nei due mezzi.

Figura 26. Il fenomeno della rifrazione può essere studiato all'ondoscopio disponendo sul fondo della vasca una spessa lastra di vetro di forma opportuna, che riduce la profondità dell'acqua rallentando così la velocità di propagazione delle onde. La figura rappresenta la propagazione di onde rettilinee (provenienti dal basso) in un ondoscopio dove la linea di separazione fra la parte più profonda (in basso a destra) e quella meno profonda (in alto a sinistra) è disposta diagonalmente. Si osserva che i fronti d'onda vengono deviati, tendendo a diventare paralleli alla linea di separazione. (fotografia come in Mondo della Fisica, vol. B, pag. 535, fig. 21, o altra simile in tal caso aggiustando la dida)

2.8 L'effetto Doppler

Chi non si è accorto del cambio di tonalità, al loro passaggio, del ronzio di un aereo, del fischio di un treno o della sirena di una ambulanza? Questo fenomeno si verifica tutte le volte che la sorgente si trova in moto rispetto all'osservatore oppure quest'ultimo si trova in moto rispetto alla sorgente. La sua spiegazione si deve al fisico austriaco Christian Doppler (1803-1853), per cui esso si chiama **effetto Doppler.**

> Qui per "osservatore" si intende anche un sensore in grado di rivelare le onde. Per esempio, un microfono, nel caso di onde sonore.

Notate che questo fenomeno differisce dagli altri considerati in precedenza, nei quali la frequenza delle onde, stabilita dalla sorgente, non subiva mai variazioni. Nell'effetto Doppler, invece, la frequenza delle onde osservate viene modificata dal moto della sorgente o dell'osservatore.

L'effetto Doppler non riguarda soltanto i suoni, ma qualsiasi tipo di onda, e quindi anche la luce, le onde radio e le altre onde elettromagnetiche. Ma l'analisi che svolgiamo in questo paragrafo vale soltanto per le onde di tipo meccanico, cioè le onde che possono propagarsi soltanto in un mezzo materiale. Nel caso delle onde elettromagnetiche, che per propagarsi non hanno bisogno di un supporto materiale e che nel vuoto viaggiano a velocità altissima e rigorosamente costante, la trattazione dell'effetto Doppler è basata sulla teoria della relatività, e per questo dell'effetto Doppler relativistico ci occuperemo in seguito (→ Tomo V, pag. xxx). Notiamo tuttavia che anche nel caso elettromagnetico le conclusioni, almeno qualitativamente, sono le stesse. E infatti la luce di una sorgente che si allontana da noi, come la maggior parte delle Galassie, ci appare "arrossata", perchè di frequenza minore di quella effettivamente emessa.

Ricordiamo ora, sebbene sia ovvio, che quando la sorgente è ferma ed emette onde di frequenza f, l'osservatore riceve un segnale della stessa frequenza. Ricordiamo anche che la lunghezza d'onda, cioè la distanza fra due fronti d'onda successivi, è legata alla frequenza f e alla velocità di propagazione v dalla formula (5): $\lambda = vT = v/f$.

Osservatore in moto e sorgente ferma

Un osservatore fermo in un punto è raggiunto dalle onde periodiche emesse da una sorgente fissa. Il numero di fronti d'onda, cioè di creste, che investono l'osservatore nell'unità di tempo è precisamente la frequenza f dell'onda. Ma questo non è più vero se l'osservatore è in moto, cioè se il punto di osservazione cambia nel tempo.

Supponiamo che l'osservatore si stia avvicinando dalla sorgente (sempre supposta ferma) con velocità costante v_o (→ figura 27). Ora il numero di fronti d'onda che egli osserva nell'unità di tempo è pari al precedente, cioè f, più quelli che incontra nel suo percorso di avvicinamento, cioè v_o/λ, essendo λ la distanza fra due fronti successivi. Sicché la frequenza misurata dall'osservatore è:

$$f' = f + \frac{v_o}{\lambda} = \frac{v + v_o}{\lambda}$$

Sostituendo λ con v/f si ottiene:

(10) $$f' = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

cioè *la frequenza misurata da un osservatore che si avvicina a una sorgente periodica ferma è maggiore di quella della sorgente, tanto maggiore quanto più esso è veloce*. In accordo con l'esperienza comune.

Quello che succede nel caso opposto, cioè quando l'osservatore si allontana dalla sorgente con velocità costante di modulo v_o, dovrebbe essere chiaro. Seguendo lo stesso ragionamento di prima, il numero di fronti d'onda che lo raggiungono nell'unità di tempo è minore che se fosse fermo, in ragione della velocità con cui egli si allontana, E quindi la frequenza misurata è minore di quella della sorgente. Ma la formula precedente, per nostra fortuna, resta valida, purché in questo caso si attribuisca segno negativo alla velocità v_o dell'osservatore.

Esempio 4. Il suono della sirena percepito da un motociclista.
Vogliamo calcolare la variazione di frequenza del suono percepito da un motociclista che viaggia a velocità costante $v_o = 90$ km/h, quando passa davanti a una sirena, in posizione fissa, che emette un fischio alla frequenza f = 3000 Hz, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v = 340 m/s.
Quando il motociclista si avvicina alla sirena, la frequenza del suono, che gli appare più alta di quella della sorgente, si ricava dalla formula (10) assegnando segno positivo alla sua velocità, v_o = 90 km/h = 25 m/s: $f' = f(1 + v_o/v) = 3000(1 + 25/340) = 3221$ Hz. Quando il motociclista si allontana dalla sirena, la frequenza del suono, che gli appare più bassa di quella della sorgente, si ricava ancora dalla formula (10), ma assegnando segno negativo alla velocità: $f' = f(1 - v_o/v) = 3000(1 - 25/340) = 2779$ Hz.

Esempio 5. Calcoliamo la velocità di un musicista perché scambi per un Re il Do emesso da una sorgente.
Un altoparlante in posizione fissa emette la nota Do, la cui frequenza è di 261,63 Hz. Vogliamo calcolare la velocità a cui deve viaggiare un musicista perché oda invece la nota Re, la cui frequenza è 293,66 Hz, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v = 340 m/s.
Osserviamo subito che il musicista deve udire una frequenza (f' = 293,66 Hz) maggiore di quella (f = 261,63 Hz) emessa dalla sorgente e pertanto deve muoversi in avvicinamento. La sua velocità v_o si ricava dalla formula (10): $v_o = v(f'/f - 1) = 340(293{,}66/261{,}63 - 1) = 41{,}62$ m/s = 149,8 km/h.

Esempio 6. Calcoliamo la velocità di un automobilista perché scambi per verde il rosso di un semaforo.
Un automobilista si avvicina a gran velocità a un semaforo rosso, che emette luce alla frequenza $f = 4{,}9\cdot10^{14}$ Hz, ma non frena perché vede luce verde alla frequenza di $5{,}7\cdot10^{14}$ Hz. Vogliamo calcolare la velocità a cui viaggia l'automobilista.
Il problema è analogo a quello trattato nell'Esempio precedente. La velocità v_o dell'automobilista si ricava dalla formula (10): $v_o = v(f'/f - 1) = 3\cdot10^8(5{,}7\cdot10^{14} /4{,}9\cdot10^{14} - 1) = 4{,}9\cdot10^7$ m/s $= 1{,}76\cdot10^8$ km/h.

Il risultato dell'Esempio 6 è palesemente assurdo. Ma è anche sbagliato. Come detto prima, infatti, la formulazione dell'effetto Doppler per le onde elettromagnetiche è diversa da quella per le onde meccaniche.

Notiamo infine che, quando si passa a velocità costante accanto a una sorgente sonora, la frequenza del suono non cambia bruscamente ma varia con continuità, a differenza di quanto previsto dalla formula (10). Perché in effetti noi passiamo sempre a qualche distanza dalla sorgente e quindi la nostra velocità è diversa da quella di avvicinamento alla sorgente considerata nella (10). Nel nostro moto, la velocità di avvicinamento alla sorgente (prima) e di allontanamento dalla sorgente (poi) variano dunque gradualmente, tanto più gradualmente quanto più lontani passiamo dalla sorgente.

Sorgente in moto e osservatore fermo
Quando la sorgente è in moto, i fronti d'onda da essa generati non sono più concentrici, dato che i

loro centri si spostano con la posizione della sorgente (→ figura 28). Consideriamo una sorgente periodica di frequenza f, che emette onde si propagano con velocità v, a cui corrisponde la lunghezza d'onda $\lambda = v/f$.

Quando la sorgente, si avvicina all'osservatore con velocità costante v_s, la distanza fra due fronti successivi dell'onda che lo investe, cioè la lunghezza d'onda λ' da egli misurata, diventa minore di λ. Di quanto? Della distanza percorsa dalla sorgente durante un periodo di oscillazione, cioè $v_sT = v_s/f$. E quindi si ha:

$$\lambda' = \lambda - v_s/f$$

A questa lunghezza d'onda corrisponde la frequenza $f' = v_s/\lambda'$. Quindi l'osservatore misurerà la frequenza

$$f' = v/\lambda' = v/(\lambda - v_s/f)$$

Sostituendo in tale espressione $\lambda = v/f$, si ottiene infine:

(11) $$f' = f\,\frac{1}{1 - v_s/v}$$

Per applicare correttamente le formule (10) e (11) non è necessario ricordare le convenzioni sul segno delle velocità. Basta ragionare, tenendo presente che quando la sorgente e l'osservatore si avvicinano la frequenza osservata aumenta; quando si allontanano. diminuisce.

cioè *la frequenza f' misurata da un osservatore fermo quando ad esso si avvicina una sorgente periodica in moto è maggiore di quella (f) della sorgente, tanto maggiore quanto più essa è veloce*. Anche qui, in accordo con l'esperienza comune.

Allo stesso modo, quando la sorgente si allontana, la lunghezza d'onda λ' misurata dall'osservatore risulta maggiore, in ragione della velocità della sorgente. Vale ancora la formula (11), in tal caso però assegnando segno negativo alla velocità della sorgente.

Esempio 7. Il suono di un'autoambulanza percepito da un pedone fermo.
Vogliamo calcolare la variazione di frequenza del suono percepito da un pedone fermo quando gli passa accanto un'ambulanza che viaggia a velocità costante $v_s = 90$ km/h, che emette un suono alla frequenza f = 3000 Hz, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v = 340 m/s.
Quando l'ambulanza si avvicina al pedone, la frequenza del suono si ricava dalla formula (11) assegnando segno positivo alla sua velocità, $v_o = 90$ km/h = 25 m/s: $f' = f/(1 - v_s/v) = 3000/(1 - 25/340) = 3238$ Hz. Quando l'ambulanza si allontana, la frequenza del suono si ricava ancora dalla formula (11), ma assegnando segno negativo alla velocità del veicolo: $f' = f(1 - v_o/v) = 3000/(1 + 25/340) = 2795$ Hz.
Il modulo della variazione di frequenza del suono è diversa nei due casi: quando l'ambulanza si avvicina si ha $\Delta f' = 3238 - 3000 = 238$ Hz; quando si allontana, $\Delta f' = 3000 - 2795 = 205$ Hz.

Esempio 8. Calcoliamo la velocità di un automobilista perché scambi per un Re il Do emesso da una sorgente ferma.
Un altoparlante in posizione fissa emette la nota Do, la cui frequenza è di 261,63 Hz. Vogliamo calcolare la velocità a cui deve viaggiare un musicista perché oda invece la nota Re, la cui frequenza è 293,66 Hz, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v = 340 m/s.
Osserviamo subito che il musicista deve udire una frequenza (f' = 293,66 Hz) maggiore di quella (f = 261,63 Hz) emessa dalla sorgente e pertanto deve muoversi in avvicinamento. La sua velocità v_o la ricaviamo dalla formula (5): $v_o = v(f'/f - 1) = 340(293{,}66/261{,}63 - 1) = 41{,}62$ m/s = 149,8 km/h.

Due osservazioni, per concludere. La prima è, come si è visto, che *l'effetto Doppler non è simmetrico,* nel senso che le cose vanno diversamente a seconda che a muoversi sia la sorgente oppure l'osservatore. In altre parole, non conta soltanto il moto relativo fra sorgente e osservatore, come invece si sarebbe potuto immaginare. Il fatto è che vi sono tre, e non due, enti fisici in gioco: la sorgente, l'osservatore e il mezzo in cui si propagano le onde. L'altra osservazione riguarda la formula (11), secondo la qualela frequenza vista dall'osservatore dovrebbe risultare negativa quando la velocità della sorgente diventa maggiore di quella di propagazione dell'onda. Questo assurdo fisico, in realtà, non si verifica, come vedremo subito.

I fenomeni supersonici

Cosa avviene quando la sorgente di onde sonore si muove con velocità uguale o addirittura superiore a quella del suono? Sappiamo che i fronti d'onda emessi da una sorgente in moto non sono concentrici, come per una sorgente in quiete, ma hanno i centri spostati progressivamente nella direzione del moto, come indicato nella parte a) della figura 30, in misura proporzionale alla velocità.

Assai particolare è ciò che avviene quando la sorgente viaggia alla velocità del suono, e a questa velocità si spostano quindi i centri dei fronti d'onda successivi. Come mostra la parte b) della figura, i fronti d'onda si sovrappongono creando un fronte di compressione, nel quale si verifica evidentemente una fortissima concentrazione di energia, chiamato **onda d'urto**. Questo fronte si sposta assieme alla sorgente: nel caso di un aereo, viene udito come un *bang*, cioè un rumore molto intenso.

Quando poi la velocità della sorgente diventa maggiore della velocità del suono, la sorgente lascia dietro di sé i fronti d'onda, il cui inviluppo, di forma conica, costituisce ora il fronte di compressione. Questa situazione è rappresentata nella parte c) della figura, dove la sorgente si trova inizialmente nel punto S: la distanza OS è proporzionale alla velocità v_s della sorgente in moto, la distanza OA alla velocità v del suono. E quindi il seno della semiapertura α del cono rappresenta il rapporto fra la velocità (v) del suono e quella (v_s) della sorgente:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OS}} = \frac{v}{v_s}$$

Il rapporto fra la velocità di un oggetto in moto (un aereo, un razzo, …) e la velocità del suono viene spesso indicato come *numero di Mach,* dal nome del fisico austriaco Ernst Mach che fu il primo a studiare teoricamente l'argomento dei moti supersonici.

Figura 27. La sorgente in moto emette onde sonore in punti diversi man mano che si sposta, sicché i fronti d'onda da essa generati non sono concentrici. Quando la sorgente si avvicina, la lunghezza d'onda risulta più corta, la frequenza più alta e il suono più acuto. Quando si allontana accade l'opposto e il suono risulta più grave.
(vignetta da fare adattando da Mondo della Fisica, vol. B, pag. 536, fig. 21

Figura 28. L'osservatore in moto si avvicina alla sorgente. Il numero di fronti d'onda che lo investono nell'unità di tempo è maggiore che quando è fermo, e quindi la frequenza risulta maggiore di quella della sorgente.
(vignetta da fare adattando da Fisica 2, Caforio 2004, pag. 65, spostando a destra il ragazzo che corre verso la sorgente, indicandone la velocità (freccia diretta verso la sorgente) con v_o e indicando con la scritta λ la distanza fra due cerchi successivi qualsiasi)

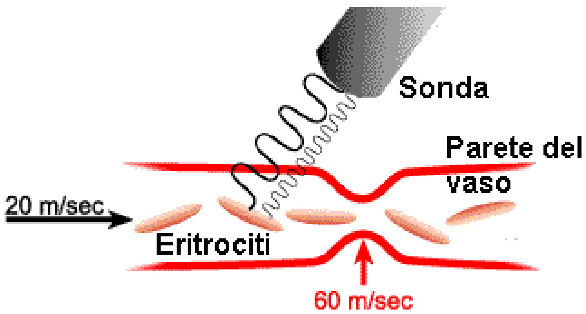


Figura 29. L'effetto Doppler a ultrasuoni trova impiego in medicina per misurare la velocità del sangue, più precisamente della sua componente corpuscolare (globuli rossi, globuli bianchi, …). La sonda applicata sulla pelle invia un fascio di ultrasuoni e misura la variazioni di frequenza del fascio riflesso, che dipende appunto dalla velocità del sangue. Ciò permette di accertare o escludere la presenza di restringimenti dei vasi in cui scorre il sangue, come pure la loro eventuale chiusura.
(Adattare la figura disegnando le due onde con la stessa frequenza, accompagnate da due freccine in sensi opposti; o trovare una foto della sonda applicata a un paziente)

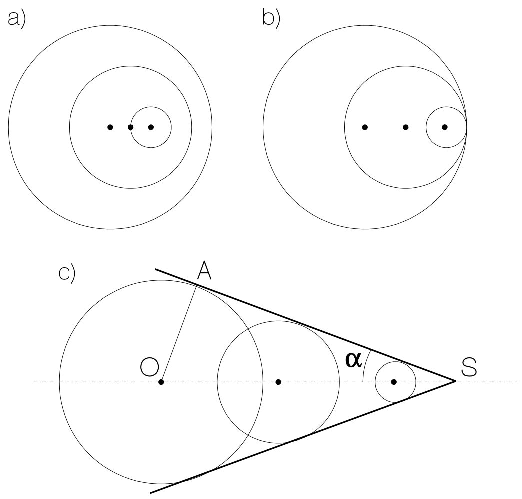


Figura 30. a) La sorgente viaggia a velocità inferiore a quella del suono, cioè a *velocità subsonica*; b) la sorgente viaggia alla velocità del suono (*velocità sonica*): i fronti d'onda si sovrappongono creando un'*onda d'urto*; c) la sorgente viaggia a velocità maggiore di quella del suono (*velocità supersonica*): l'onda d'urto assume forma conica.

Figura 31. Il primo volo supersonico ebbe luogo il 14 ottobre 1947, quando l'aereo sperimentale americano X-1 superò la cosidetta "barriera del suono". Nella fotografia l'areorazzo NASA X-43 A, che nel 2004, sebbene per breve tempo, raggiunse Mach 10: un piccolo aereo senza passeggeri lungo 3,7 m e con apertura alare di 1,5 m. A esso spetta attualmente il record di velocità.

Test di verifica

1) Le onde sono costituite da

O materia che si sposta O fluidi in moto O forme in movimento

2) Vero o falso?

	V	F
Le onde trasportano energia	O	O
Le onde possono essere usate per trasmettere informazioni a distanza	O	O
Le onde trasportano materia a distanza	O	O
Le onde possono propagarsi soltanto in due o tre dimensioni	O	O
A grande distanza dalla sorgente un'onda circolare si manifesta localmente come un'onda piana	O	O
Le onde si propagano con velocità infinita	O	O

3) Gettando un sasso in uno stagno si producono onde

O sferiche O circolari O rettilinee

4) All'aumentare della distanza r dalla sorgente, l'intensità di un'onda sferica, in unità di W/m^2, diminuisce secondo la legge:

O $1/r$ O $1/r^2$ O $1/r^3$

5) Per trasmettere informazioni a distanza le onde più convenienti sono quelle che si propagano

O in una dimensione O in due dimensioni O in tre dimensioni

6) L'attenuazione che subisce un'onda sferica all'aumentare della distanza, data dalla formula (1), dipende

O dagli attriti O dalla geometria della sua propagazione O della natura fisica dell'onda

7) Un'onda piana si propaga in assenza di dissipazioni. In tal caso l'energia dell'onda

O aumenta O resta costante O diminuisce

man mano che essa si propaga.

8) Sottolineate gli errori che individuate nelle frasi seguenti.

In assenza di ostacoli, le onde generate in un punto dello spazio si propagano attorno ad esso come onde piane. In assenza di dissipazioni, allontanandosi dalla sorgente, il flusso di energia si mantiene costante. A grande distanza, queste onde si manifestano localmente come onde rettilinee.

9) Vero o falso?

	V	F
Le onde sulla superficie dell'acqua sono onde longitudinali	O	O
Le onde sulla superficie dell'acqua sono onde trasversali	O	O
Le onde trasversali possono propagarsi soltanto nei solidi e nei liquidi	O	O
Le onde elettromagnetiche possono propagarsi nel vuoto	O	O
Le onde meccaniche possono propagarsi soltanto in un mezzo materiale	O	O

10) L'equazione delle onde armoniche (→ formula (3)) rappresenta correttamente, in assenza di dissipazioni,

O qualsiasi onda armonica

O solo le onde che si propagano in un mezzo unidimensionale

O solo le onde che si propagano in un mezzo unidimensionale, le onde rettilinee e le onde piane

11) Nell’equazione delle onde armoniche $s\left(x,t\right)=K\cos\left(2\pi\left(Ht-\frac{x}{J}\right)\right)$

la costante J rappresenta

O l’ampiezza dell’onda O la frequenza dell’onda $\underline{\text{O}}$ la lunghezza d’onda

la costante H rappresenta

O l’ampiezza dell’onda $\underline{\text{O}}$ la frequenza dell’onda O la lunghezza d’onda

la costante K rappresenta

$\underline{\text{O}}$ l’ampiezza dell’onda O la frequenza dell’onda O la lunghezza d’onda

12) Quando un’onda sinusoidale si propaga in un mezzo, i punti investiti dall’onda si muovono

O spostandosi trasversalmente O con moto rettilineo uniforme $\underline{\text{O}}$ con moto armonico

13) Le onde periodiche non armoniche

$\underline{\text{O}}$ possono essere ricondotte a una pluralità di onde armoniche

O richiedono una trattazione matematica che esula da questo corso

O non hanno significato fisico

14) Le onde armoniche lungo una fune sono dette “doppiamente armoniche” perchè

O la frequenza dei moti armonici è doppia rispetto a quella con cui la fune viene eccitata

$\underline{\text{O}}$ esse sono armoniche rispetto sia allo spazio che al tempo

O lungo la fune vi sono coppie di punti che si spostano di moto armonico in fase fra loro

15) La velocità del suono nell’acqua è maggiore che nell’aria. Concludiamo che la lunghezza d’onda del suono nell’aria è

O maggiore O la stessa $\underline{\text{O}}$ minore

di quella nell’acqua

16) Un’onda sonora con frequenza di 1000 Hz si propaga nell’aria (v = 340 m/s), un’onda sonora con frequenza di 4353 Hz si propaga nell’acqua (v = 1480 m/s). La lunghezza d’onda della prima è

O maggiore $\underline{\text{O}}$ la stessa O minore

di quella della seconda.

17) Nel grafico a fianco, l’onda di frequenza maggiore è quella indicata con

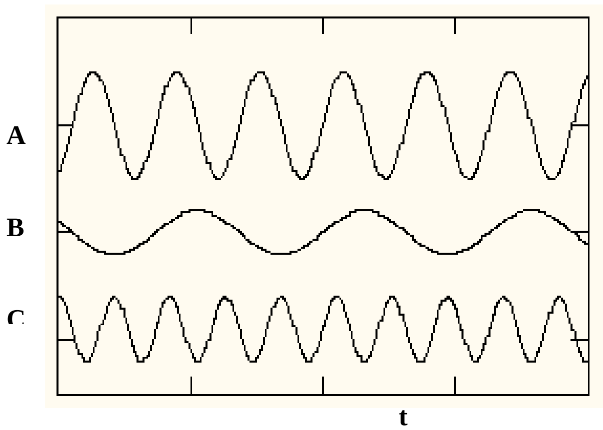
O A O B $\underline{\text{O}}$ C

L’onda di ampiezza maggiore è quella indicata con

$\underline{\text{O}}$ A O B O C

L’onda di periodo maggiore è quella indicata con

O A $\underline{\text{O}}$ B O C



18) Raddoppiando la frequenza e l’ampiezza di un’onda, l’energia aumenta di un fattore

O 4 O 8 $\underline{\text{O}}$ 16

19) Due creste successive di un’onda della frequenza di 1700 Hz distano fra loro 120 cm. Pertanto la velocità di propagazione dell’onda è

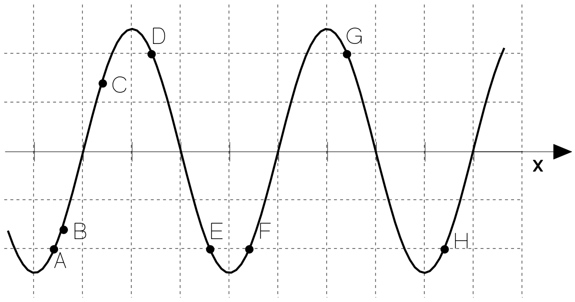
O 340 m/s O 1417 m/s $\underline{\text{O}}$ 2040 m/s

20) Nell'onda rappresentata nel grafico in figura sono fra loro in fase i punti

O A, E O F, D O A, H

sono in opposizione di fase i punti

O A, E O A, G O B, C



21) Vero o falso? V F

L'incontro di due onde che viaggiano l'una verso l'altra crea un effetto di riflessione O O

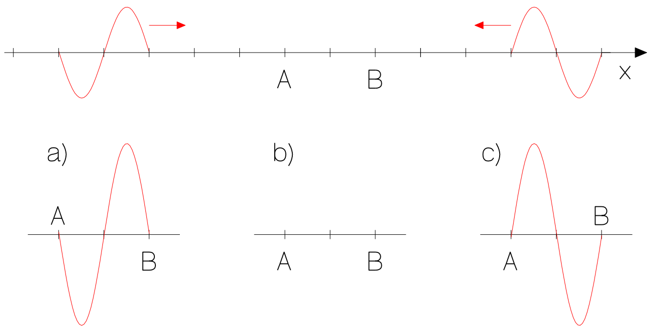
L'interferenza distruttiva fra due onde produce l'annullamento degli spostamenti O O

Il principio di sovrapposizione fra due onde stabilisce che lo spostamento complessivo è dato dalla somma algebrica degli spostamenti che esse avrebbero prodotto separatamente O O

Si ha interferenza costruttiva quando due onde si trovano in opposizione di fase O O

22) Lungo una fune si propagano le due onde impulsive in figura, dirette l'una verso l'altra. Quando esse si sovrappongono nel tratto AB la foma della fune è quella rappresentata in

O a) O b) O c)



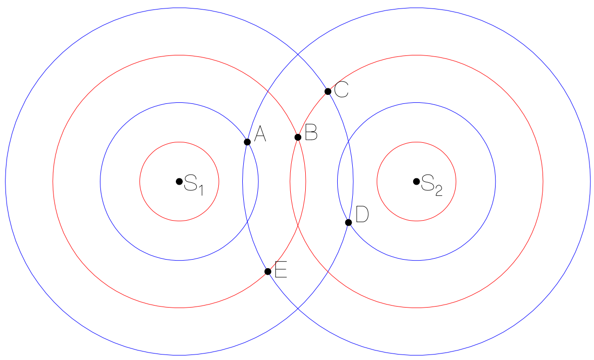
23) Le circonferenze blu rappresentano, a un dato istante, i fronti d'onda (cioè le creste, punti di massimo) generati da due sorgenti periodiche puntiformi; le circonferenze rosse rappresentano le valli (punti di minimo).

Si ha interferenza costruttiva nei punti

O A e B O A e C O C ed E

Si ha interferenza distruttiva nei punti

O A e B O A e C O C ed E



24) Completate la frase seguente.

Ogni punto di un fronte d'onda si comporta come una sorgente secondaria di onde rettilinee, con la stessa frequenza dell'onda di origine; il fronte successivo è dato dall'inviluppo di queste onde secondarie.

25) Collegando a un amplificatore un secondo altoparlante, il suono che si ode

O viene rafforzato O viene indebolito O può venire rafforzato oppure indebolito

26) Un'onda può aggirare un ostacolo di estensione finita grazie al fenomeno della

O riflessione O diffrazione O rifrazione

27) La direzione di un'onda cambia quando essa attraversa il confine fra due mezzi nei quali è diversa la sua velocità di propagazione. Tale fenomeno prende il nome di

O riflessione O diffrazione O rifrazione

28) Il funzionamento delle lenti è basato sul fenomeno della

O riflessione O diffrazione O rifrazione

29) L'angolo di rifrazione è uguale all'angolo di incidenza quando quest'ultimo vale

O 0 O $\pi/4$ O $\pi/2$

30) Un'onda piana investe una parete con un forellino piccolo rispetto alla lunghezza d'onda. L'onda che emerge dal forellino

O è sferica O è piana O rettilinea

31) Un'onda piana investe una parete con un foro grande rispetto alla lunghezza d'onda. L'onda che emerge dal foro

O è sferica O è piana O rettilinea

32) Quando un'onda subisce rifrazione passando da un mezzo a un altro dove la sua velocità è minore, quello che aumenta è

O la lunghezza d'onda O il periodo O la frequenza

33) Quando una sorgente sonora periodica si allontana da un osservatore, questo percepisce un suono la cui frequenza

O è maggiore di O uguale a O minore di

quella della sorgente.

34) Un osservatore che si avvicina a una sorgente sonora periodica percepisce un suono la cui frequenza

O è maggiore di O uguale a O minore di

quella della sorgente.

35) Le onde subiscono variazioni di frequenza quando si verifica

O la rifrazione O l'effetto Doppler O la diffrazione

36) Vero o falso?

	V	F
L'effetto Doppler si verifica per le onde sonore ma non per quelle elettromagnetiche	O	O
L'effetto Doppler dipende soltanto dal moto relativo fra sorgente e osservatore	O	O
Il colore della luce delle galassie che si allontanano ci appare spostata verso il rosso	O	O

37) Il numero di Mach rappresenta

O la velocità di un veicolo in unità di 1000 km/h

O il rapporto fra la velocità di un corpo in moto e la velocità del suono

O il rapporto fra la velocità del suono e la velocità di un corpo in moto

38) Completate la frase seguente

Quando una sorgente di onde sonore si sposta alla stessa velocità delle onde si dice che la sua velocità è sonica. In tal caso i fronti d'onda si sovrappongono con una elevata concentrazione di energia, creando un'onda d'urto. Velocità maggiori sono dette supersoniche; queste velocità si rappresentano usualmente con il numero di Mach, che rappresenta il rapporto fra la velocità della sorgente e quella del suono.

Problemi e quesiti

1. Una lampadina elettrica da 50 watt emette una potenza luminosa di 3 watt uniformemente in tutte le direzioni. Calcolate l'intensità della luce, cioè il flusso della potenza luminosa, che investe una superficie piana disposta a) a 10 m dalla sorgente, b) a 100 m dalla sorgente.

Risoluzione. Il problema è indeterminato se non si conosce come la superficie è orientata rispetto alla sorgente. Ammettendo che essa sia disposta perpendicolarmente alla direzione della sorgente, il flusso di potenza a distanza r dalla sorgente, misurato in unità di W/m^2, è dato dalla formula (1a): $P/4\pi r^2$, chiamando P la potenza luminosa della lampadina. Alla distanza di 10 m si ha: $P/4\pi r^2 = 3/(4\times 3{,}14\times 10^2) = 2{,}39\cdot 10^{-3}$ W/m^2. Alla distanza di 100 m si ha: $P/4\pi r^2 = 3/(4\times 3{,}14\times 100^2) = 2{,}39\cdot 10^{-5}$ W/m^2. In generale, chiamando α l'angolo fra la normale alla superficie e la direzione della sorgente, l'espressione (1a) va moltiplicata per cos α. Osservando in particolare che il flusso di potenza che investe la superficie si annulla per $|\alpha| = \pi/2$.

2. Una lampadina elettrica da 50 watt emette una potenza luminosa di 3 watt, che viene irraggiata uniformemente in tutte le direzioni nell'angolo solido 2π. Calcolate la potenza luminosa che investe una superficie piana di area 1 cm^2 disposta perpendicolarmente alla direzione della sorgente, a 10 m da essa.

Risoluzione. Ammettendo che la superficie si trovi nella semisfera illuminata, per calcolare l'intensità luminosa utilizziamo la formula (1a), modificata per tener conto dell'effettiva distribuzione dell'energia: $I = P/2\pi r^2 = 3/(2\times 3{,}14\times 10^2) = 4{,}78\cdot 10^{-3}$ W/m^2. Sicché la potenza che investe la superficie di area S = 1 cm^2 è: $SP = 10^{-4}\times 4{,}78\cdot 10^{-3} = 4{,}78\cdot 10^{-7}$ W.

3. Una sorgente periodica puntiforme eccita uno specchio d'acqua creando onde circolari, che a 10 m dalla sorgente hanno l'altezza di 5 cm. Calcolate l'altezza delle onde a 20 m dalla sorgente, sapendo che l'energia di un'onda è direttamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione e trascurando gli attriti.

Risoluzione. Il flusso di energia di un'onda superficiale subisce un'attenuazione inversamente proporzionale alla distanza dalla sorgente, sicché a 20 m dalla sorgente esso si riduce alla metà del flusso a 10 m. Sapendo il quadrato dell'altezza delle onde è direttamente proporzionale all'energia, più precisamente al flusso di energia, si conclude che a 20 m di distanza il quadrato dell'altezza delle onde è pari a ½ del quadrato dell'altezza a 10 m di distanza. Quindi l'altezza delle onde a 20 m dalla sorgente è $5/\sqrt{2}$ cm = 3,54 cm.

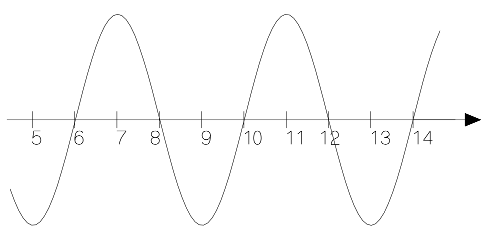
4. Un onda rettilinea solitaria viaggia sulla superficie del mare con altezza inversamente proporzionale alla velocità di propagazione, che a sua volta è direttamente proporzionale alla radice quadrata della profondità. Calcolate l'altezza dell'onda quando essa, vicino alla riva, raggiunge acque con profondità di 1 m, sapendo che più al largo, con profondità di 20 m, la sua altezza è 90 cm.

Risoluzione. Dato che l'altezza dell'onda è inversamente proporzionale alla radice quadrata della profondità, si conclude che l'altezza dell'onda nel tratto di mare con profondità di 1 m è: $0{,}9\times\sqrt{(20/1)} = 4{,}02$ m.

5. Spiegate brevemente perché le onde trasversali non possono propagarsi in un liquido o un gas.

Risoluzione. Quando un volumetto di liquido o di gas viene spostato trasversalmente alla direzione di propagazione dell'onda, esso non trasmette il moto agli strati adiacenti, rispetto ai quali le sue molecole scorrono senza esercitare forze apprezzabili.

6. La sinusoide in figura rappresenta lo spostamento di un'onda. Calcolatene la lunghezza d'onda supponendo che l'asse delle ascisse, tarato in unità di cm, rappresenti lo spazio. Calcolatene la frequenza supponendo che l'asse delle ascisse, tarato in unità di μs, rappresenti il tempo. Utilizzate questi risultati per calcolare la velocità di propagazione dell'onda.

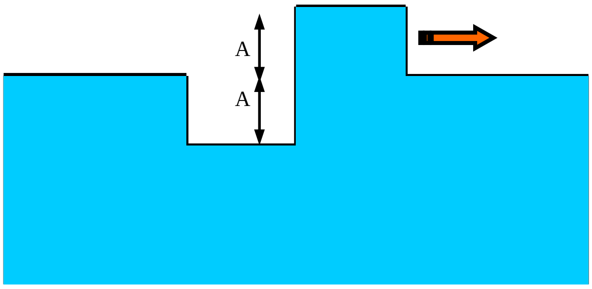


Risoluzione. Supponendo che l'asse delle ascisse rappresenti lo spazio in unità di cm, si osserva che la distanza fra due cicli successivi corrisponde a quattro unità, cioè a 4 cm; si ha pertanto λ = 0,04 m. Supponendo che l'asse delle ascisse, rappresenti il tempo in unità di μs, si osserva che la distanza fra due cicli successivi corrisponde a quattro unità, cioè a 4 μs; si ha pertanto T = 4 μs, da cui $f = 1/T = 1/4\cdot10^{-6} = 2{,}5\cdot10^5$ Hz. La velocità di propagazione dell'onda si ricava dalla formula (4): $v = \lambda f = 0{,}04\times2{,}5\cdot10^5 = 10^4$ m/s.

7. Un estremo di una lunga sbarra di metallo viene eccitato da un vibratore creando un'onda periodica di compressione che si propaga nella sbarra alla velocità di 3,9 km/s con lunghezza d'onda di 4,3 m. Calcolate la frequenza del vibratore e quella a cui vibrano i punti della sbarra.

Risoluzione. Tutti i punti della sbarra vibrano alla stessa frequenza del vibratore che la eccita. La frequenza si calcola ricavandola dalla formula (5): f = v/λ = 3900/4,3 = 907 Hz.

8. La figura rappresenta in forma estremamente semplificata un'onda impulsiva che si propaga sulla superficie dell'acqua. Mostrate che quando l'ampiezza dell'onda si raddoppia l'energia potenziale dell'onda si quadruplica.



Risoluzione. Per valutare l'energia potenziale dell'onda consideriamo l'energia potenziale della massa d'acqua spostata verso l'alto. Questa energia è direttamente proporzionale sia al volume dell'acqua spostata sia allo spostamento del baricentro. Il volume dell'acqua è direttamente proporzionale all'ampiezza A; lo spostamento del baricentro è pari all'ampiezza A. Pertanto quando l'ampiezza A si raddoppia l'energia potenziale dell'onda si quadruplica.

9. Scrivete l'equazione delle onde che rappresenta un'onda armonica di frequenza f = 10 Hz che viaggia nella direzione positiva dell'asse x alla velocità v = 5 m/s, con ampiezza massima s_0 = 1 cm al tempo t = 0 nel punto x = 0. Modificate poi l'equazione in modo che al tempo t = 0 l'ampiezza nel punto x = 0 sia nulla.

Risoluzione. Esaminando la formula (3) si individuano tre parametri: s_0, T e λ. s_0 è dato, T = 1/f = 1/10 = 0,1 s, λ = vT = 5×0,1 = 0,5 s. Sostituendo questi valori nella (3) si ha: $s(x,t) = 0{,}01\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{0{,}1} - \frac{x}{0{,}5}\right)\right)$ m . Si verifica facilmente che per t = 0 e x = 0 l'argomento del coseno si annulla sicché l'ampiezza dell'onda è $s = s_0$. Nella stessa condizione (t = 0 e x = 0) l'ampiezza si annulla se l'argomento del coseno vale π/2. Basta quindi aggiungere π/2 all'argomento del coseno, o più semplicemente, ciò che è equivalente, sostituire il coseno con il seno, cioè:
$s(x,t) = 0{,}01\,\mathrm{sen}\left(2\pi\left(\frac{t}{0{,}1} - \frac{x}{0{,}5}\right)\right)$ m .

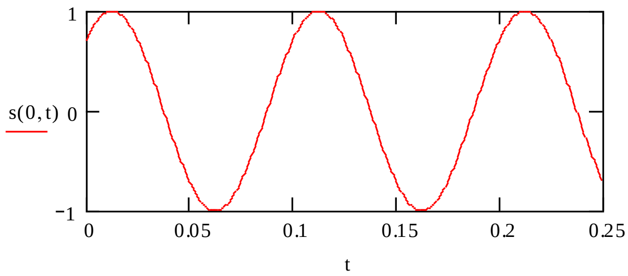
10. Per l'onda armonica descritta dall'equazione $s(x,t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{0{,}5}\right)\right)$ calcolate le posizioni dei punti dove si trovano le creste, quelle dove si trovano le valli e quelle dove lo spostamento si annulla, all'istante t = 0,5 s.

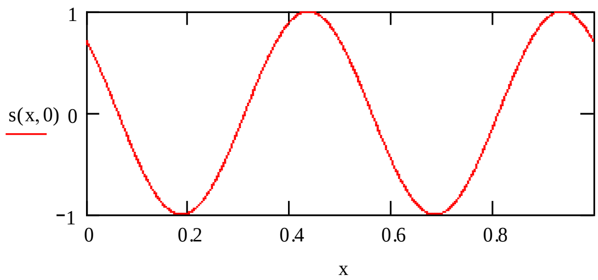
Risoluzione. Al tempo t = 0,5 s lo spostamento dei punti è: $s(x) = \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{0{,}5}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\pi x\right)$. Le creste corrispondono ai massimi della funzione, che si hanno ai valori delle ascisse per cui vale l'uguaglianza π/2 – 4πx = 2πk, con k intero, cioè per x = 1/8 –k/2. La cresta corrispondente a k = 0 si ha in particolare all'ascissa x = 0,125 m; la successiva è quella corrispondente a k = -1, all'ascissa x = 0,625 m. Le valli corrispondono ai minimi della funzione, che si hanno ai valori delle ascisse per cui vale l'uguaglianza π/2 – 4πx = πh, con h dispari, cioè per x = 1/8 – h/4. La valle corrispondente a h = -1 si ha in particolare all'ascissa x = 0,375 m. Lo spostamento è nullo, infine, quando la funzione si annulla, cioè l'argomento del coseno vale jπ/2, con j intero dispari e quindi vale l'uguaglianza π/2 – 4πx = jπ/2. Cioè per x = (1-j)/8, e in particolare a x = 0 per j = 1.

11. L'espressione di un'onda che si propaga lungo l'asse x è scritta nella forma: $s(x,t) = \cos(2\pi(10t - 2x + 0{,}125))$. Individuate la frequenza e la lunghezza d'onda.

Calcolate lo spostamento al tempo t = 0 nel punto x = 0. Tracciate infine i seguenti grafici: a) lo spostamento nel punto x = 0 nell'intervallo di tempo fra 0 e 0,25 s, b) lo spostamento al tempo t = 0 nei punti fra 0 e 1 m.

Risoluzione. Confrontando l'espressione dell'onda con l'equazione (3), si individuano la frequenza f = 10 Hz, e conseguentemente il periodo T = 1/f = 0,1 s, e la lunghezza d'onda λ = 0,5 m. Lo spostamento nel punto x = 0 al tempo t = 0 è: cos (π/4) = 0,707.

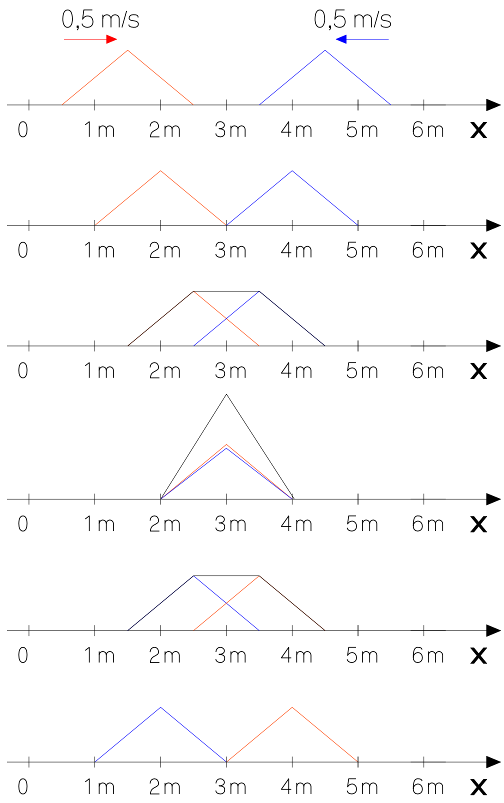




12. Due onde impulsive viaggiano l'una incontro all'altra alla velocità di 0,5 m/s, trovandosi nella posizione in figura al tempo t = 0. Disegnate le due onde e l'onda complessiva risultante agli istanti t = 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s.

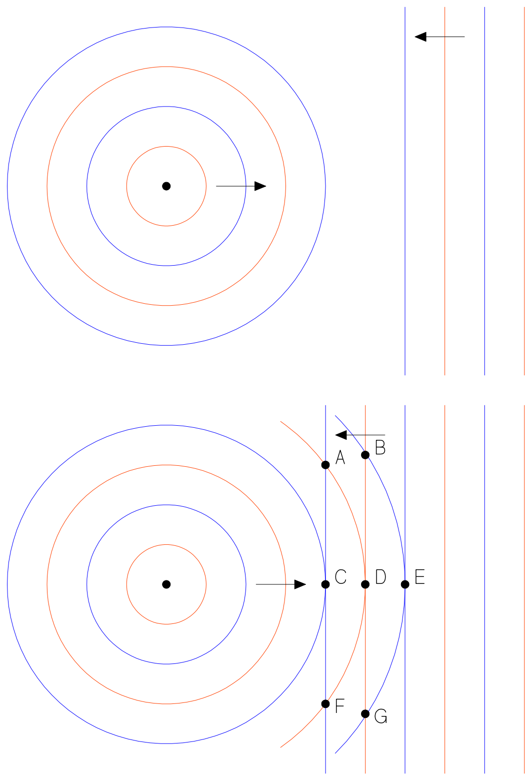
(nel testo solo la parte in alto del grafico, nella Guida tutto il grafico)

Risoluzione. Applicando il principio di sovrapposizione, si trova che le due onde si sovrappongono parzialmente al tempo t = 2 s, totalmente al tempo t = 3 s, e di nuovo parzialmente al tempo t = 4 s, come indicato nel grafico.



13. Svolgete il problema precedente nel caso in cui l'impulso a destra (blu) sia invertito, cioè il suo spostamento abbia segno negativo.

Risoluzione. Le due onde si sovrappongono parzialmente al tempo t = 2 s, totalmente al tempo t = 3 s, in tal caso cancellandosi completamente, e di nuovo parzialmente al tempo t = 4 s.

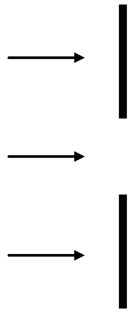


14. Le curve blu rappresentano a un dato istante i fronti d'onda (le creste) di un'onda circolare e di un'onda rettilinea della stessa frequenza; le curve rosse rappresentano le valli. Completate il disegno per rappresentare le due onde dopo un periodo. Individuate i punti dove si verifica interferenza costruttiva e dove si verifica interferenza distruttiva (supponendo per semplicità che nella zona d'interferenza le due onde abbiano la stessa ampiezza).

(Il grafico completo nella Guida, nel testo solo la parte superiore)

Risoluzione. Per rappresentare la situazione dopo un periodo, si tracciano due circonferenze concentriche (una rossa per indicare le valli e una blu per indicare le creste) con incremento costante dei raggi e due rette parallele (una rossa e una blu) a sinistra di quelle presenti nel disegno, a distanze costanti da esse. Si ha interferenza costruttiva nei punti d'intersezione fra curve dello stesso colore (come in C, D, E), cioè dove entrambe le onde hanno un massimo o un minimo, sicché l'onda risultante ha ampiezza doppia. Si ha interferenza distruttiva nei punti d'intersezione fra curve di colore diverso (come in A, B, F, G), cioè dove un'onda presenta un massimo e l'altra un minimo, sicché l'onda risultante si annulla.

15. Un'onda piana investe una parete con un foro circolare. Stabilite la forma dell'onda diffratta che si propaga oltre la parete quando a) la lunghezza d'onda è molto maggiore delle dimensioni del foro, b) la lunghezza d'onda è molto minore delle dimensioni del foro.



Risoluzione. Nel caso a) dal foro emerge un'onda approssimativamente sferica (come nella parte a) della figura 23). Nel caso b) dal foro emerge un'onda approssimativamente piana (come nella parte b) della figura 23).

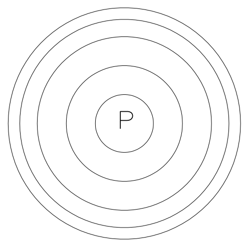
16. Un radar emette impulsi di microonde alla frequenza di 10 GHz. Calcolate dopo quanto tempo dall'invio di un impulso il radar riceve l'impulso riflesso da un pallone che si trova a 10 km di altezza sulla verticale di un punto che dista 4 km dal sito del radar.

Risoluzione. Il pallone dista dal radar $d = \sqrt{6^2 + 10^2}\ km = 11,7 \cdot 10^4\ m$. Dato che le microonde si propagano alla velocità c ≈ 300000 km/s, il tempo necessario perché l'impulso percorra due volte la distanza d è: $\Delta t = 2d/c = 2 \times 1{,}17 \cdot 10^4 / 3 \cdot 10^8 = 7{,}8 \cdot 10^{-5}$ s = 78 μs.

17. Per stabilire la distanza a cui si trovano prede oppure ostacoli, un pipistrello emette pacchetti di onde ultrasoniche alla frequenza di 50 kHz. I pacchetti, che durano 2 ms ciascuno, sono ripetuti con periodo di 12 ms. Calcolate la massima distanza a cui il pipistrello può rivelare la presenza di un bersaglio senza che l'impulso di ritorno interferisca con il successivo, sapendo che queste onde viaggiano a 340 m/s.

Risoluzione. Se le onde si propagano a velocità v = 340 m/s e il bersaglio si trova a distanza d al pipistrello, il ritardo con cui l'impulso riflesso raggiunge il volatile con ritardo $\Delta t = 2d/v$. Per evitare interferenze, questo ritardo deve essere inferiore al tempo fra il termine di un pacchetto d'onda e l'inizio del successivo, cioè deve essere verificata la disuguaglianza: $2d/v < (12 - 2)$ ms = 10 ms = 0,01 s. Da cui si ricava $d < 0{,}01\ v/2 = 0{,}01 \times 340/2 = 1{,}7$ m.

18. Il grafico a fianco rappresenta i fronti delle onde circolari prodotte da una sorgente periodica, di frequenza fissa, che eccita l'acqua di una vasca nel punto P. Stabilite se il grafico è decisamente insensato oppure se può essere interpretato in termini di uno dei fenomeni caratteristici delle onde (riflessione, rifrazione, diffrazione).



Risoluzione. Il grafico mostra che, a partire da una data distanza dalla sorgente, la lunghezza d'onda λ diminuisce gradualmente al crescere della distanza. Ricordando che λ = v/f , ed escludendo che la frequenza possa variare, possiamo attribuire le variazioni di lunghezza d'onda a variazioni della velocità di propagazione v. Cioè a un fenomeno di rifrazione graduale, che potrebbe essere causato da una particolare forma del fondo della vasca, con profondità crescente all'aumentare della distanza dal punto dove si trova la sorgente. La simmetria circolare di tale struttura, che è la stessa dei fronti d'onda, spiega perché i fronti non subiscano deviazioni.

19. Un'onda piana passa da un mezzo con velocità di propagazione v_1 = 2000 m/s a un altro con velocità 3000 m/s. Calcolate l'angolo di rifrazione quando l'angolo di incidenza è $i_1 = 0$ e quando è $i_2 = 30°$.

Risoluzione. L'angolo di rifrazione si ricava dalla formula (9): r = arcsen((v_2/v_1) sen i). A $i_1 = 0$, dato che sen 0 = 0, corrisponde $r_1 = 0$; A $i_2 = 45°$ corrisponde r_2 = arcsen((v_2/v_1) sen i) = arcsen(3000/2000) sen 30°) = arcsen(0,75) = 48,6°.

20. Spiegate brevemente perché quando ci passa accanto un'ambulanza con la sirena in funzione, la frequenza del suono varia gradualmente, anziché bruscamente, fra i due valori

che si ottengono dall'equazione (10) quando la sorgente è in avvicinamento e quando è in allontanamento.

Risoluzione. Il fatto è che noi non ci troviamo (per fortuna) esattamente sulla traiettoria dell'ambulanza, nel qual caso la frequenza del suono varierebbe bruscamente, ma noi non potremmo apprezzarlo. L'ambulanza passa invece a una certa distanza da noi sicché la sua velocità di avvicinamento a noi (e poi di allontanamento da noi), non è costante, ma varia gradualmente. Ciò che conta ai fini del calcolo dell'effetto Doppler, infatti, è la componente della velocità secondo la retta che congiunge la nostra posizione e quella dell'ambulanza.

21. La sirena di un TIR, che viaggia in autostrada a 108 km/h, emette un suono alla frequenza di 400 Hz. Calcolate la frequenza percepita da un automobilista fermo in una piazzola di sosta quando il TIR si sta avvicinando e quando si sta allontanando, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v = 340 m/s.

Risoluzione. Dato che la sorgente è in moto e l'osservatore è fermo, applichiamo la formula (11). Quando il TIR, con velocità v_s = 108 km/h = 30 m/s , è in avvicinamento, l'automobilista in sosta percepisce una frequenza f' più alta di quella (f) emessa dal camion. Attribuendo segno positivo alla velocità v_s, si ha: $f' = f/(1 - v_s/v) = 400/(1 - 30/340) =$ 439 Hz. Quando il TIR è in avvicinamento, l'automobilista percepisce una frequenza f' più bassa di quella (f) emessa dal camion. Attribuendo segno negativo alla velocità v_s, si ha: $f' = f/(1 + v_s/v) = 400/(1 + 30/340) = 368$ Hz.

22. Dopo aver eseguito misure sull'effetto Doppler del suono, con sorgente ferma e velocità dell'osservatore di 5 m/s e con osservatore fermo e sorgente alla velocità 5 m/s, uno sperimentatore afferma di aver trovato che l'entità della variazione di frequenza nei due casi è la medesima, concludendo che l'effetto Doppler è simmetrico, cioè dipende soltanto dal moto relativo fra osservatore e sorgente.

Risoluzione. Le conclusioni dello sperimentatore sono in evidente contrasto con quanto esposto nel paragrafo 8. Ma esaminiamone i risultati per capire perché egli sia giunto a queste conclusioni. Quando la sorgente si avvicina all'osservatore fermo, con v = 340 m/s e v_o = 5 m/s, dalla formula (10) si ha $f' = f(1 + v_o/v) = f(1 + 5/340) = 1{,}0147 f =$ 1014,7 Hz. Quando l'osservatore si avvicina alla sorgente ferma, con v_s = 5 m/s, dalla formula (11) si ha $f' = f/(1 - v_o/v) = f/(1 - 5/340) = 1{,}0149 f = 1014{,}9$ Hz. Poiché i valori calcolati sono molto vicini fra loro (lo scarto relativo è di appena $\approx 2 \cdot 10^{-4}$), assai probabilmente lo sperimentatore, esaminando i corrispondenti valori misurati, li avrà considerati uguali entro gli errori sperimentali, arrivando così a una conclusione errata. Certo è che le differenze sarebbero risultate ben apprezzabili se nell'esperimento si fossero utilizzate velocità maggiori, per rendere più significativo l'effetto Doppler. Come avrebbe dovuto fare un buon sperimentatore.

23. Un treno Eurostar, che viaggia alla velocità di 240 km/h, emette un fischio alla frequenza f = 1000 Hz mentre si avvicina a una galleria. Sapendo che la velocità del suono nell'aria è v = 340 m/s, calcolate la frequenza f' del suono che sente un passante fermo vicino all'imbocco del tunnel e la frequenza f'' del suono riflesso dalla collina che sente il macchinista.

(Vignetta da fare come in Walker, vol. 2, pag. O20)

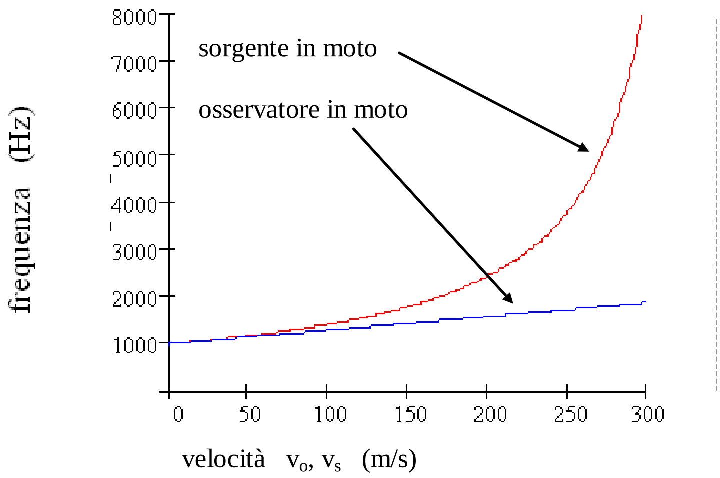
Risoluzione. La frequenza f' che ode l'osservatore fermo è data dalla formula (11), assegnando segno positivo alla velocità della sorgente dato che si avvicina all'osservatore, v_S = 240 km/h = 66,7 m/s. Si ha pertanto $f' = f/(1 - v_s/v) =$ $1000/(1 - 66{,}7/340) = 1244$ Hz. Il suono di frequenza f' viene riflesso dalla collina che costituisce una sorgente ferma rispetto al macchinista in moto. La frequenza f'' che questo sente è data dalla formula (10), dove alla velocità v_o = 66,7 m/s dell'osservatore assegniamo segno positivo, dato che l'osservatore si avvicina alla sorgente: $f'' = f'(1+ v_o/v) =$ $1244(1 + 66{,}7/340) = 1488$ Hz.

24. Ricavate una espressione per l'effetto Doppler nel caso generale in cui sia la sorgente che l'osservatore si trovino in moto.

Risoluzione. Una sorgente in moto con velocità v emette un suono di frequenza f, che viene udito da un osservatore fermo con la frequenza f'data dalla formula (10). Possiamo immaginare questo suono di frequenza f' come prodotto da una sorgente ferma, che l'osservatore in moto udrà alla frequenza f'' data dalla formula (11), avendo in essa sostituito f con f'. Cioè si ha: $f' = f\left(1+\frac{v_o}{v}\right)$ e $f'' = f'\frac{1}{1-v_s/v}$. Combinando le due formule si ottiene infine: $f'' = f\frac{1+v_o/v}{1-v_s/v}$. Notiamo che le velocità scalari che figurano in tale espressione, come del resto nelle formule (10) e (11), sono le componenti delle velocità vettoriali lungo la congiungente fra l'osservatore e la sorgente.

25. Riportate in uno stesso grafico: a) la frequenza udita da un osservatore in moto verso una sorgente ferma che emette un suono a 1000 Hz, quando la velocità v_o dell'osservatore varia fra 0 e 300 m/s; b) la frequenza udita da un osservatore fermo quando la sorgente si avvicina ad esso con velocità v_s fra 0 e 300 m/s.

Risoluzione. In un grafico con la velocità (sia v_o che v_s) riportata sull'asse delle ascisse, la curva a) si ottiene applicando la formula (10), la curva b) applicando la formula (11). Si nota che per bassi valori del rapporto fra le due velocità e la velocità del suono, le due curve coincidono approssimativamente. Nel caso dell'osservatore in moto, la variazione di frequenza è direttamente proporzionale alla velocità; nel caso della sorgente in moto la frequenza aumenta senza limiti man mano che si avvicina alla velocità del suono.



26. Un aereo supersonico viaggia alla velocità di 2,5 Mach. Calcolate la sua velocità in km/h sapendo che la velocità del suono alla quota dell'aereo è 290 m/s.

Risoluzione. La velocità dell'aereo si ottiene moltiplicando la velocità del suono per il numero di Mach: 290×2,5 = 725 m/s = 725×3600/1000 = 2610 km/h.

27. Un aereo supersonico viaggia alla velocità di 2,2 Mach a una quota dove la velocità del suono è 340 m/s. Calcolate la sua velocità in km/h e confrontatela con quella dell'aereo del Problema 26.

Risoluzione. La velocità dell'aereo si ottiene moltiplicando la velocità del suono per il numero di Mach: 340×2,2 = 748 m/s = 748×3600/1000 = 2693 km/h. Tale velocità è maggiore di quella dell'aereo considerato nel Problema 26.