

Modulo 2 La luce

Unità 1 La propagazione rettilinea

In questa Unità ci occupiamo della luce utilizzando una nozione che l'umanità conosce da millenni: quella di raggio luminoso che si propaga in linea retta. Questo modello permette di interpretare in modo assai semplice molti fenomeni luminosi, ma non risponde alla realtà e infatti non è possibile isolare un raggio di luce. La nozione di raggio luminoso è comunque alla base di quella parte dell'ottica che prende il nome di *ottica geometrica* e tratta essenzialmente della riflessione e della rifrazione della luce. Dei fenomeni nei quali diventa necessario considerare la luce in termini di onde, come la diffrazione e l'interferenza, ci occuperemo invece in seguito, nel quadro dell'*ottica ondulatoria*.

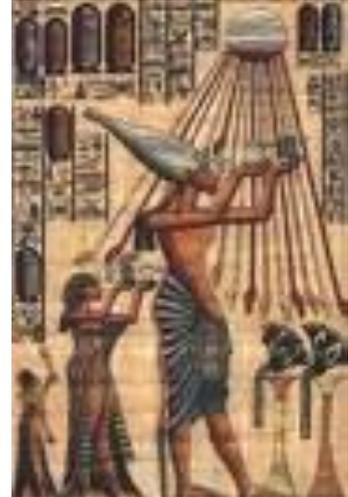


Figura 0. Questo monumento funerario del 14° secolo avanti Cristo rappresenta un'offerta del faraone egiziano Akenaton al dio Sole, del quale egli aveva introdotto il culto come dio unico sostituendolo al politeismo. Si notano i raggi solari, rappresentati come linee rette, che terminano in mani protese verso gli uomini. (fotografia come in Delaruelle, vol. 2, pag. 200)

1.1 La luce

Il dibattito sulla natura della luce – onde, corpuscoli o cos'altro? - è attivo da oltre 25 secoli. Ne tratteremo nel seguito, prima nella Unità 3 e poi ancora più avanti, per arrivare alle conclusioni accettate oggi dagli scienziati, cioè che la luce, sebbene costituita da particelle (*fotoni*), manifesta tuttavia una duplice natura, sia corpuscolare che ondulatoria. Per ora assumiamo che la luce sia costituita da onde, le **onde luminose**, che assieme alle onde radio e a tante altre rientrano fra le *onde elettromagnetiche* di cui ci occuperemo nel Tomo IV. Si tratta cioè di perturbazioni di natura elettrica e magnetica, che si propagano a distanza mantenendo la loro forma e trasportando energia, come qualsiasi altro tipo di onde. Ma con la particolarità di propagarsi anche nel vuoto, cioè in assenza di un mezzo materiale.

Ma quali onde elettromagnetiche sono effettivamente luce? Quelle *visibili*, cioè quelle a cui l'occhio umano è sensibile. La sensibilità media dell'occhio umano, rappresentata in figura 1, ha il massimo alla lunghezza d'onda di 555 nm (luce giallo-verde) e si estende fra le lunghezze d'onda di circa 720 nm e 360 nm, corrispondenti rispettivamente al limite della luce *rossa* e di quella *violetta*. Le onde appena al di fuori di questa regione sono chiamate *infrarosse* (IR) e *ultraviolette* (UV), con denominazioni di ovvio significato.

Noi “vediamo” i corpi che si trovano attorno a noi, vicini o lontani che siano, quando la luce provenienti da essi raggiunge i sensori di luce che si trovano nei nostri occhi, quando i segnali nervosi corrispondenti raggiungono il cervello e quando questo li elabora creando un'immagine di ciò che ci circonda. Noi vediamo le **sorgenti luminose**, come il Sole o una lampadina, che sono chiamate così perché emettono luce propria. Ma vediamo anche i **corpi illuminati**, che rimandano indietro, più precisamente diffondono attorno, la luce diretta ricevuta da una sorgente o, più spesso, quella diffusa a loro volta da altri corpi illuminati. Non vediamo però i corpi riflettenti, che riflettono le immagini di ciò che li circonda.

Le sorgenti luminose possono emettere luce grazie a vari processi: per esempio, la luce delle lucciole e di altri esseri viventi è prodotta da particolari reazioni chimiche; quella delle lampade fluorescenti o dei laser proviene da “salti di energia” di elettroni di atomi eccitati da scariche elettriche. Nella maggior parte dei casi, però, la luce viene prodotta per **emissione termica**, cioè quando i corpi si trovano a temperature sufficientemente alte, approssimativamente oltre 1200 K. Il

Ciò che è luce per certe specie animali è diverso da ciò che lo è per l'uomo. Molti uccelli, per esempio, sono sensibili anche all'ultravioletto, le api vedono i colori fra 650 nm e 300 nm.

filamento di una comune lampadina, per esempio, viene riscaldato elettricamente attorno a 2400 K, la superficie del Sole si trova a circa 5800 K.

I corpi opachi non trasmettono apprezzabilmente la luce che li investe; i **corpi trasparenti** ne lasciano passare una buona frazione (fra questi si chiamano *translucidi* quelli, come un foglio di carta oleata, che trasmettono la luce ma non le immagini). Un corpo illuminato, in generale, rimanda indietro una frazione (r) della luce ricevuta, ne assorbe un'altra parte (a) e trasmette il resto (t); dato che la luce è una forma di energia, il principio di conservazione dell'energia impone che sia: $r+a+t = 1$. La luce, a differenza del suono, si propaga anche nel vuoto, che è il mezzo più trasparente perchè in esso non si verificano fenomeni di assorbimento ($t=1$ e $a=0$). Infatti siamo illuminati dal Sole, che si trova a 150 milioni di chilometri dalla Terra, e possiamo vedere la luce proveniente da stelle a distanze enormemente maggiori.

I corpi chiari rimandano indietro gran parte della luce, quelli scuri una frazione minore. Ma spesso le proprietà sia di assorbimento che di trasmissione dei corpi dipendono dalla lunghezza d'onda della luce. Un corpo rosso, per esempio, ci appare tale perchè rimanda indietro la maggior parte della luce rossa, mentre assorbe quella degli altri colori. Un corpo bianco diffonde invece allo stesso modo le onde luminose di tutti i colori, mentre un corpo nero le assorbe tutte fortemente.

La trasparenza dei corpi dipende dall'entità dei fenomeni di assorbimento nella propagazione delle onde luminose attraverso di essi, che sono descritti dalla seguente legge:

$$(1) \quad I(x) = I(0)e^{-\alpha x}$$

dove $I(0)$ è l'intensità della radiazione luminosa in incidente sulla superficie del corpo, $I(x)$ quella a distanza x dalla superficie, α il coefficiente di assorbimento del materiale (in unità di m^{-1}). Quindi il coefficiente di trasmissione t di un corpo di spessore L si esprime nella forma: $t = e^{-\alpha L}$.

Si capisce allora che la trasparenza di un corpo dipende dal suo spessore: un materiale che noi consideriamo usualmente opaco, come un metallo, risulta trasparente quando il suo spessore è sufficientemente piccolo (\rightarrow figura 5), mentre un mezzo che consideriamo trasparente, per esempio l'acqua, è invece opaco per grandi spessori: nelle profondità del mare regna infatti il buio più assoluto.

Figura 1. La sensibilità dell'occhio umano "medio" in funzione della lunghezza d'onda della luce presenta il massimo per la luce giallo-verde a 555 nm.

(adattare da Frova, Luce colore visione, pag. 54: in orizzontale ribaltata, con scala fra 380 e 720 nm, senza campiture, eliminando i dettagli dei colori)

Figura 2. Oltre alle lucciole, emettono luce vari tipi di organismi viventi: funghi, batteri e molti esseri marini.

Il fenomeno della *bioluminescenza* è infatti particolarmente diffuso fra gli abitanti dei fondali oceanici, a profondità dove la luce solare è praticamente assente. Nella fotografia ...

(fotografia di essere marino luminescente)

Figura 3. **Esperimento.** Potete osservare facilmente l'emissione termica riscaldando sulla fiamma di un fornello un fermaglio di metallo sorretto con una pinza. Il fermaglio riscaldato emetterà inizialmente una debole luce rossastra, che diventerà poi sempre più intensa e chiara man mano che la sua temperatura aumenta.

(vignetta da fare)

Figura 4. Il grafico rappresenta la trasparenza di una lastra di vetro di 5 mm di spessore in funzione della lunghezza d'onda. Si vede che il vetro trasmette la luce visibile e una parte dell'infrarosso, ma non l'ultravioletto.

(Adattare da Mondo della fisica, tomo B, pag. 571)

Figura 5. L'oro è straordinariamente malleabile, cioè può essere ridotto a lamine sottilissime. E in tal caso risulta trasparente, come mostra questa fotografia, ripresa attraverso una lamina d'oro con spessore di 1 μm .

(fotografia da trovare)

1.2 Raggi luminosi e propagazione rettilinea della luce

La nozione di raggio luminoso rientra nella nostra esperienza comune sin dall'infanzia: quando un fascio di luce penetra in una stanza buia attraverso le finestre socchiuse, osserviamo i raggi luminosi che attraversano l'ambiente; quando la luce del Sole penetra fra le nuvole vediamo distintamente i raggi solari che attraversano il cielo sottostante.

Una formalizzazione della nozione di raggio l'abbiamo esposta a pag. xxx, chiamando **raggi le rette perpendicolari a un fronte d'onda, orientate nel verso in**

cui l'onda si propaga. Cioè rette parallele nel caso di un'onda piana, rette divergenti per un'onda sferica. Un raggio luminoso, in pratica, è un fascetto di luce molto sottile, che rappresentiamo come una retta orientata. Ma deve essere chiaro che un raggio luminoso infinitamente sottile non esiste. Che succederebbe, infatti, se volessimo crearlo inviando un fascio luminoso su uno schermo dotato di un forellino minuscolo, di dimensioni inferiori alla lunghezza d'onda della luce? Si manifesterebbe, come sappiamo, il fenomeno della diffrazione e quindi dal forellino emergerebbe un'onda sferica; cioè non un raggio di luce ma una molteplicità di raggi divergenti.

Ciò posto, diciamo che *la nozione di raggio luminoso costituisce un modello utilissimo* per trattare in modo semplice i fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce nel quadro dell'**ottica geometrica**, consentendoci di dimenticare in quest'ambito le proprietà ondulatorie della luce. Con ottima approssimazione finché ci si occupa di oggetti di dimensioni molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda, come avviene nel caso della maggior parte degli strumenti ottici.

Alla conclusione che la luce si propaga in linea retta si arriva anche esaminando il fenomeno della formazione delle ombre (→ Figura 6). Fenomeni d'ombra particolarmente vistosi, oggetto in passato di stupore e di timore, sono le **eclissi**, che avvengono quando la Terra, il Sole e la Luna si trovano allineati. L'*eclissi di Sole* si verifica quando la Luna viene a trovarsi allineata fra il Sole e la Terra, intercettando i raggi solari in modo da oscurare il Sole, tutto (eclissi totale) o in parte (eclissi parziale), in determinate regioni del nostro pianeta. Nell'*eclissi di Luna* è invece la Luna a venire oscurata (tutta o in parte); ciò avviene quando la Terra, trovandosi fra il Sole e la Luna, intercetta i raggi solari diretti verso il nostro satellite, che così non viene più illuminato.

La propagazione rettilinea dei raggi luminosi fornisce una semplice spiegazione del funzionamento della **camera oscura**: uno strumento ottico di origine molto antica che costituisce parte essenziale delle macchine fotografiche e delle telecamere, per questo così denominate. Già noto ad Aristotele, studiato dal grande scienziato arabo Alhazen nell'XI secolo e descritto poi in dettaglio da Leonardo, questo strumento fu usato nei secoli scorsi da molti pittori, in particolare dal Canaletto e altri vedutisti veneziani, per ottenere prospettive realistiche. Per camera oscura, inizialmente, s'intendeva una stanza buia, con una parete dotata di un piccolo foro: chi stava al suo interno vedeva sulla parete opposta al foro l'immagine capovolta di ciò che si trovava all'esterno del foro. In seguito, a partire dal Rinascimento, si diffuse l'impiego di camere oscure portatili, costituite da una scatola con un foro in una parete e la parete opposta costituita da un foglio di carta pergamena o di vetro smerigliato, sul quale si poteva osservare l'immagine. Costruire una camera oscura non è difficile: suggerimenti al sito

<http://newton.corriere.it/Pregresso/2002/05/2002050100033.shtml>.

Figura 6. a) L'ostacolo A intercetta una parte dei raggi emessi dalla *sorgente puntiforme* S, creando un cono d'ombra che sullo schermo si manifesta formando un'ombra ben netta; b) La lampadina L è una *sorgente estesa*, perchè ogni punto del suo bulbo smerigliato emette luce. La presenza dell'ostacolo produce sullo schermo una regione di *ombra totale*, che nessun raggio luminoso raggiunge, contornata da una di *penombra*, che è raggiunta soltanto da una parte dei raggi diretti verso di essa. Il punto B, per esempio, è raggiunto soltanto dai raggi provenienti dai punti della sorgente che si trovano al di sotto del punto A (cioè vede solo metà della lampadina), perchè gli altri raggi vengono intercettati. (adattare da Amaldi, La Fisica, vol. 2: a) fig. 4.2 a pag. 275, eliminando le scritte A, B, C, D, aggiungendo la scritta cono d'ombra con una freccetta diretta verso la zona grigia fra l'ostacolo e lo schermo; b) fig. 4.3 a pag. 276, rinominando A il punto C e spostandolo sul vertice del bulbo, rinominando B il punto P e spostandolo in basso; entrambe più piccole)

Figura 7. Eclissi di Sole. Si verifica quando la Luna, allineata fra il Sole e la Terra, intercetta i raggi solari creando sulla superficie terrestre una zona d'ombra, dove si osserva un'eclissi totale, e una, più vasta, di penombra dove l'eclissi è parziale.

(adattare da Amaldi, La Fisica, vol. 2: a) fig. 4.5 a pag. 276)

Figura 8. Eclissi di Luna. Si verifica quando la Terra, allineata fra il Sole e la Luna, intercetta i raggi solari diretti verso la Luna, perciò oscurandola, tutta o in parte.

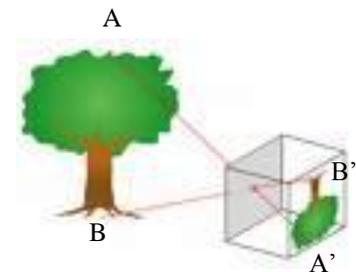
(adattare da Amaldi, La Fisica, vol. 2: a) fig. 4.5 a pag. 276)

Figura 9. Questa fotografia rappresenta il Palazzo Reale di Varsavia com'è oggi, ricostruito dopo essere stato quasi raso al suolo dai nazisti durante la II Guerra Mondiale. La ricostruzione è stata possibile grazie alle vedute eseguite nel Settecento da Giovanni Antonio Canal (Canaletto) con grande ricchezza di dettagli e straordinaria precisione prospettica, con l'ausilio, per quanto si ritiene, di una camera oscura.

(Fotografia da trovare del Palazzo Reale di Varsavia oppure della piazza adiacente modificando la dida)

Figura 10. Funzionamento di una camera oscura. La parete posteriore semitrasparente della scatola è raggiunta soltanto dai raggi passanti per il foro F. L'immagine è invertita (capovolta) perchè il raggio proveniente dal punto A dell'oggetto illuminato, in alto, raggiunge la parete nel punto A', in basso; quello proveniente dal punto B, nel punto B'.

(adattare lo schizzo, aggiungendo la scritta F in corrispondenza del foro)



1.3 La velocità della luce

La luce viaggia così rapidamente che siamo abituati a considerare istantanea la sua propagazione, e così ritenevano gli scienziati del passato. A pensarla diversamente fu Galileo, che tentò di misurare la velocità della luce, però senza successo. La tecnica di Galileo, simile a quella usata per misurare la velocità del suono, richiedeva l'intervento di due sperimentatori dotati di lanterne schermate. Si trattava di misurare l'intervallo di tempo fra l'istante in cui il primo sperimentatore lanciava un segnale luminoso e l'istante in cui riceveva il segnale di risposta dal secondo, che doveva scoprire la sua lanterna non appena era raggiunto dalla luce proveniente dal primo. Con questa tecnica, in realtà, ciò che si misura non è il brevissimo tempo di propagazione della luce, ma il tempo di reazione degli sperimentatori.

Così scrive Galileo a proposito del ritardo con cui si ode lo sparo di un cannone rispetto al lampo dell'esplosione: "...da codesta notissima esperienza non si raccoglie altro se non che il suono si conduce al nostro udito in tempo men breve di quello che si conduce il lume; ma non mi assicura se la venuta del lume sia per ciò istantanea ...".

Nel 1675 l'astronomo danese Ole Rømer (1644-1710), studiando i satelliti di Giove osservò che la periodicità delle eclissi di questi satelliti non era costante, ma variava a seconda della posizione della Terra rispetto a questo pianeta, concludendo che la luce si doveva propagare con velocità finita. Più precisamente, Rømer osservò che l'intervallo di tempo fra due scomparse successive del satellite Io dietro Giove subiva dei ritardi quando la Terra, nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, si allontanava da Giove, perché in tal caso il percorso della luce si allungava, mentre subiva degli anticipi nel caso opposto. I calcoli originali non ci sono pervenuti, però conosciamo quelli che svolse Huygens impiegando le osservazioni di Rømer, i quali forniscono per la velocità della luce il valore di $2,12 \cdot 10^8$ m/s: dello stesso ordine di grandezza di quello stabilito in seguito ($3 \cdot 10^8$ m/s), ma alquanto minore a causa di varie inesattezze. L'idea che la luce si propagasse con velocità finita non fu accettata subito dagli scienziati, ma soltanto dopo ulteriori conferme ottenute con altre misure astronomiche.

La prima misura della velocità della luce con un apparato terrestre fu ottenuta a Parigi nel 1849 dal fisico francese Armand Hippolyte Fizeau (1819-1896), su un percorso di 8,6 km. Come mostra la figura 12, la sorgente A, costituita da una potente lampada, invia un fascio di luce verso lo specchio semiriflettente B, dal quale emerge un raggio diretto verso lo specchio C posto a distanza. La traiettoria di questo raggio passa però attraverso il bordo di una ruota dentata, sicché il raggio riflesso dallo specchio C può raggiungere l'occhio dell'osservatore soltanto quando non viene intercettato da un dente; cioè quando la ruota è ferma oppure quando gira a una velocità tale che il

raggio si trovi a passare fra due denti sia all'andata che al ritorno. Con questo metodo Fizeau ottenne la seguente misura della velocità della luce: $3,13 \cdot 10^8$ m/s.

Esempio 1. Calcoliamo la velocità della luce con il metodo di Fizeau.

Supponiamo che la luce della sorgente raggiunga l'osservatore perché il raggio diretto verso lo specchio C è passato attraverso un vano fra due denti della ruota e il corrispondente raggio riflesso è passato attraverso il vano successivo. In questa condizione, vogliamo trovare una relazione fra la velocità della luce v , la distanza d fra la ruota dentata e lo specchio C, il numero n dei denti della ruota dentata e la sua velocità angolare ω .

Perché si verifichi quanto desiderato occorre che l'intervallo di tempo $\Delta t = 2d/v$, durante il quale il raggio percorre due volte la distanza d (andata e ritorno), sia esattamente uguale a quello necessario perché la ruota si porti dalla posizione dove vi era inizialmente un vano a quella dove si trova il successivo. Se $T = 2\pi/\omega$ è il periodo di rotazione della ruota, questo intervallo di tempo è $T/n = 2\pi/\omega n$. Uguagliando i due intervalli di tempo si ha: $2d/v = 2\pi/\omega n$, da cui si ricava: $v = dn\omega/\pi$.

Negli anni successivi il fisico francese Léon Foucault perfezionò il metodo di Fizeau, sostituendo fra l'altro la ruota dentata con uno specchio rotante, e trovò per la velocità della luce nell'aria il valore di $2,98 \cdot 10^8$ m/s, assai vicino a quello che conosciamo oggi. Il lavoro di Foucault è importante anche perché egli riuscì a misurare la velocità della luce anche attraverso l'acqua, trovando che era apprezzabilmente inferiore (circa $\frac{3}{4}$) di quella nell'aria.

Le misure della velocità della luce, nel vuoto e in vari mezzi materiali, svolte in seguito con metodi sempre più raffinati hanno portato alle seguenti conclusioni:

- la velocità della luce nel vuoto, che si indica con il simbolo c , è più grande che in qualsiasi mezzo materiale, è rigorosamente costante in qualsiasi condizione e per questo costituisce una costante fondamentale della fisica (\rightarrow Approfondimento 1); il suo valore ufficiale, che si rappresenta con nove cifre significative, è

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

- La velocità della luce che si propaga in un mezzo materiale (aria, acqua, vetro, ...) dipende dalle caratteristiche del mezzo secondo la legge:

$$(2) \quad v = c/n$$

dove la costante adimensionale n , chiamata **indice di rifrazione** del mezzo perché interviene nei fenomeni di rifrazione, è sempre maggiore dell'unità.

L'indice di rifrazione ci ricorda che la luce è costituita da onde elettromagnetiche perché dipende, seppur debolmente, dalla lunghezza d'onda, aumentando generalmente al diminuire di questa. Nel caso dell'acqua, per esempio, l'indice di rifrazione vale 1,330 per la luce rossa ($\lambda = 687$ nm) e 1,341 per la luce violetta ($\lambda = 434$ nm).

Tabella 1. Velocità della luce in alcuni mezzi materiali e corrispondente indice di rifrazione a 293 K (per luce gialla, $\lambda = 589$ nm)

Materiale	indice di rifrazione n	velocità della luce c/n (m/s)
acqua	1,333	$2,249 \cdot 10^8$
alcol etilico	1,362	$2,201 \cdot 10^8$
petrolio	1,45	$2,07 \cdot 10^8$
ghiaccio (a 273 K)	1,309	$2,290 \cdot 10^8$
plexiglas	1,49	$2,01 \cdot 10^8$
vetro	$\approx 1,5$	$\approx 2,0 \cdot 10^8$
quarzo, cloruro di sodio (sale da cucina)	1,54	$1,95 \cdot 10^8$

polistirolo	1,59	$1,89 \cdot 10^8$
vetro ottico pesante (flint)	1,65	$1,82 \cdot 10^8$
diamante	2,417	$1,240 \cdot 10^8$

Come mostra la Tabella 1, l'indice di rifrazione è generalmente maggiore nei solidi che nei liquidi. Nei gas esso è solo appena maggiore dell'unità, sicché di solito nei calcoli si assume che la velocità di propagazione della luce nei gas, e in particolare nell'aria, sia la stessa che nel vuoto. Inoltre spesso, sia per i gas che per il vuoto, si utilizza in pratica l'approssimazione

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

che introduce un errore in eccesso di $\approx 0,07\%$ per il vuoto, $\approx 0,1\%$ per l'aria.

Approfondimento 1. La velocità della luce è una velocità molto speciale.

La velocità della luce nel vuoto è una velocità molto speciale. Infatti, per quanto si conosce oggi, essa costituisce un limite invalicabile per la velocità di qualsiasi corpo, grande o piccolo che sia. Anche le particelle che viaggiano a velocità altissime nelle macchine acceleratrici possono soltanto sfiorare la velocità della luce: gli elettroni accelerati a energie elevatissime nella macchina LEP costruita a Ginevra si sono avvicinati ad essa a meno di qualche miliardesimo.

Inoltre, tutte le misure della velocità della luce nel vuoto, eseguite con estrema precisione, indicano che essa è rigorosamente costante: sempre, dovunque e in qualsiasi condizione. Per questo tale grandezza costituisce una costante fondamentale della fisica; forse la più importante, dato che è usata oggi per definire sia l'unità di lunghezza, il metro (\rightarrow Tomo I, pag. xxx), sia l'unità di tempo, il secondo (\rightarrow Tomo I, pag. xxx). Il suo valore sperimentale è $c_{\text{per}} = 299\,792\,458,4 \pm 1,2 \text{ m/s}$, cioè con nove cifre significative. E su questa base nel 1983 il suo valore ufficiale è stato fissato al seguente valore esatto: $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$.

Ma la velocità della luce riserva altre sorprese perché, a differenza di quella di qualsiasi altro ente fisico, non dipende dal sistema di riferimento nel quale viene misurata, e questa sua proprietà particolarissima costituisce il fondamento della teoria della relatività (\rightarrow Tomo V, pag. xxx).

Quando guardiamo il Sole, nessuno ci assicura che nel frattempo esso non si sia spento, dato che la sua luce impiega circa 8 minuti per raggiungerci e quindi noi lo vediamo com'era 8 minuti prima. Così la luce della stella più vicina (Proxima Centauri) impiega 4,3 anni per arrivare sulla Terra, e ne impiega svariati miliardi di anni quella dei corpi celesti più distanti, ancora accessibili ai nostri strumenti, sicché l'astronomia non è un "viaggio" soltanto nello spazio, ma anche nel tempo. Le distanze astronomiche vengono spesso misurate in anni-luce, dove l'**anno-luce** è la distanza che la luce percorre in un anno, pari a : $c \times 1 \text{ anno} = 299\,792\,458 \times 365 \times 24 \times 3600 = 9,45 \cdot 10^{15} \text{ m}$, cioè 9,45 milioni di milioni di chilometri. E quindi possiamo dire che il Sole si trova a 8 minuti luce da noi, Proxima Centauri a 4,3 anni luce.

Figura 11. Römer conosceva il periodo orbitale del satellite gioviano Io (uno dei quattro satelliti medicei scoperti da Galileo) attorno al pianeta. Quando però la Terra si allontanava da Giove, nella posizione 1 in figura, le misure di questo periodo, ottenute fra due eclissi successive, risultavano maggiori, mentre risultavano minori quando la Terra si avvicinava a Giove, nella posizione 2. Römer concluse allora che la luce non si propaga istantaneamente, e conoscendo nei due casi la distanza di Giove dalla Terra e la velocità relativa dei due pianeti, poté ottenere una stima della sua velocità.

(adattare da Caforio, Fisica, vol. 2, pag. 92, disegnata orizzontalmente, con Giove a destra e il Sole a sinistra, e le due immagini della Terra una al di sopra del Sole, con la scritta 1, e l'altra al di sotto del Sole, con la scritta 2)

Figura 12. La luce emessa dalla sorgente A raggiunge lo specchio B, che la riflette verso il bordo della ruota dentata in rotazione. I lampi di luce che passano nei vani fra i denti della ruota raggiungono, dopo un percorso di 8,6 km, lo specchio C che li riflette all'indietro. I lampi riflessi raggiungono l'osservatore attraverso lo specchio semiriflettente B, ma soltanto se incontrano anch'essi un vano anziché un dente: ciò avviene quando la velocità angolare della ruota soddisfa la relazione ricavata nell'Esempio 1.

(Adattare da Amaldi, La Fisica, vol.2, pag.279, scambiando destra con sinistra)

1.4 La riflessione della luce

Che succede quando un raggio di luce incontra un mezzo trasparente diverso da quello da cui proviene? Per esempio, passando dall'aria al vetro, dall'acqua all'aria o dall'aria a una plastica trasparente. In tal caso il raggio si scinde in due: un **raggio riflesso**, che rimbalza all'indietro nel mezzo di provenienza, e un **raggio rifratto**, che s'inoltra nel nuovo mezzo. E se il secondo mezzo è opaco? In tal caso il raggio rifratto è assente oppure di entità trascurabile.

I fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce ubbidiscono evidentemente alle stesse leggi che abbiamo discusso in generale a proposito delle onde nell'Unità 2, che richiameremo, approfondendone le conseguenze, in questo paragrafo e nei successivi. In particolare, le due **leggi della riflessione** (o *leggi di Snell*) sono le seguenti (→ Figura 13):

- *il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie di separazione fra i due mezzi giacciono tutti nello stesso piano;*
- *l'angolo di incidenza (i), fra il raggio incidente e la normale, è uguale all'angolo di riflessione (r), fra il raggio riflesso e la normale:*

$$(3) \quad i = r$$

La scoperta sperimentale delle leggi della rifrazione è attribuita allo scienziato olandese Willebrod Snell (1591-1626).

Cosa avviene se scambiamo la posizione della sorgente che emette il raggio incidente con quella dell'occhio che osserva il raggio riflesso? Il percorso dei raggi di luce resterà lo stesso, ma sarà compiuto nel senso opposto. Questo è un caso particolare di un principio generale dell'ottica geometrica, chiamato **principio di invertibilità dei cammini ottici**. Che naturalmente vale anche per il raggio incidente e il raggio rifratto rappresentati nella figura 13.

Il fenomeno della riflessione può manifestarsi in modi molto diversi. Quando inviamo un fascetto di luce su uno specchio, sulla sua superficie liscia la riflessione dei raggi luminosi avviene in modo regolare, cioè si ha *riflessione speculare*: se il fascetto è formato da raggi paralleli e lo specchio è piano, anche i raggi riflessi saranno paralleli fra loro. Assai diverso è invece ciò che accade quando il fascetto di raggi investe un foglio di carta, la cui superficie è ricca di minuscole asperità. Le leggi della riflessione restano valide, ma la direzione della normale alla superficie del foglio è diversa in ogni suo punto sicché i raggi riflessi vengono sparpagliati attorno (→ figura 14), cioè si ha *riflessione diffusa*. Diciamo allora che il foglio di carta diffonde attorno, più o meno in tutte le direzioni, la luce che lo investe. Fenomeni analoghi si verificano anche quando lanciamo un palla contro un muro: se questo è liscio possiamo prevedere esattamente in che direzione essa rimbalza, ma se ha una superficie irregolare la direzione del rimbalzo è tutt'altro che determinata.

Quanto detto ha una importante conseguenza. Quando guardiamo un foglio di carta (o qualsiasi altro oggetto diffondente, cioè la maggior parte degli oggetti) noi vediamo il foglio di carta. Quando invece guardiamo uno specchio, non vediamo lo specchio ma l'immagine riflessa di ciò che gli sta attorno.

La Fisica attorno a noi 1. Perché il cielo è azzurro, i tramonti rossi e le nuvole bianche?

Prima di rispondere a queste domande ne poniamo un'altra: perché il cielo è luminoso? Ciò accade perché la Terra possiede un'atmosfera e le molecole dei gas dell'aria diffondono attorno, in tutte le direzioni, la luce del Sole che le investe. E quindi siamo illuminati anche quando siamo in ombra. Invece sulla Luna, che è priva di atmosfera, il cielo è nero sicché si possono vedere le stelle anche di giorno (lunare), come hanno riferito gli astronauti.

L'effetto di diffusione da parte delle molecole dell'aria privilegia però fortemente le lunghezze d'onda più piccole essendo proporzionale a $1/\lambda^4$, come stabilì Lord Rayleigh nel 1871. E quindi noi vediamo il cielo azzurro (non violetto, per l'effetto combinato della debole presenza della luce violetta nella radiazione solare e della scarsa sensibilità dell'occhio a questa luce).

E il tramonto rosso? La luce del tramonto, come del resto quella dell'alba, ci arriva dopo aver percorso un cammino molto lungo attraverso l'atmosfera, nel corso del quale la maggior parte

della luce di piccola lunghezza d'onda ha subito diffusione. Sicché nella luce residua prevalgono il rosso e il giallo.

Non è selettiva, invece, la diffusione da parte delle goccioline d'acqua che costituiscono le nuvole, sicché la luce che ci proviene da esse è bianca; e così pure ci appare bianco il "vapore" che si solleva dall'acqua che bolle in una pentola, in realtà costituito dalle goccioline create dalla condensazione del vapor d'acqua. Ciò dipende dalle dimensioni delle goccioline, che sono molto maggiori delle lunghezze d'onda della luce, a differenza di quelle delle molecole dell'aria.

Figura A. Un fascio di luce solare (bianca), man mano che attraversa l'atmosfera, s'impoverisce della luce blu che viene diffusa lateralmente, sicché nella luce residua prevale il rosso, come appunto vediamo all'alba e al tramonto. (adattare da Hecht, vol.2, pag. 826)

Figura 13. Quando un raggio di luce colpisce la superficie di separazione fra due mezzi trasparenti si scinde in un *raggio riflesso* che rimbalza all'indietro e in un *raggio rifratto* che s'inoltra nel secondo mezzo. Le direzioni di questi due raggi sono determinate, rispettivamente, dalle leggi della riflessione e delle rifrazione. (adattare da Amaldi, La Fisica, vol.2, pag. 282, disegnata in orizzontale con l'aria a sinistra e il vetro a destra)

Figura 14. Quando un fascetto di luce colpisce una superficie, la direzione dei raggi riflessi è sempre stabilita dalle leggi della riflessione. Sia quando si ha *riflessione speculare* perché la superficie è liscia (a), sia quando si ha *riflessione diffusa* perché la superficie è scabra, e allora la diversa inclinazione delle varie porzioni della superficie provoca uno sparpagliamento dei raggi riflessi, creando attorno luce diffusa. La luce "si accorge" che una superficie è scabra quando le dimensioni delle asperità sono maggiori di una frazione di lunghezza d'onda. (Adattare da Walker, Fisica, vol. 2, pag. 500, con 4 raggi incidenti anziché tre)

Figura 15. La superficie di un foglio di carta è tutt'altro che regolare, come mostra questa fotografia a forte ingrandimento. (fotografia da trovare)

Figura 16. L'illuminazione naturale degli ambienti è affidata alla luce diffusa che penetra attraverso le finestre. Ma anche la luce artificiale delle lampade viene spesso utilizzata come luce diffusa. A questo scopo si usano lampade che proiettano la loro luce verso il soffitto, che la diffonde nell'ambiente in modo uniforme, più gradevole per l'assenza delle zone di ombra create dalla luce diretta. Cosa accadrebbe, secondo voi, se la superficie del soffitto fosse riflettente anziché diffondente? (fotografia di una stanza illuminata con luce diffusa)

1.5 Gli specchi

La proprietà essenziale degli **specchi** è quella di fornire immagini. Vediamo in dettaglio cosa avviene quando ci specchiamo, esaminando la figura 17. Ogni punto del nostro corpo, illuminato dalla luce presente nell'ambiente, diffonde luce attorno nella forma di raggi luminosi. Alcuni di questi raggi raggiungono la superficie dello specchio e vengono riflessi. Alcuni raggi riflessi, infine, raggiungono i nostri occhi. Ma il cervello, abituato alla propagazione della luce in linea retta, vede il punto da cui provengono questi raggi come se si trovasse dietro allo specchio.

Se lo specchio è piano, come quello in figura, il *punto immagine* P' si forma a una distanza d' dallo specchio uguale a quella d fra lo specchio e il *punto oggetto* P, cioè in posizione simmetrica rispetto allo specchio. E lo stesso avviene per qualsiasi altro punto dell'oggetto, sicché l'immagine complessiva è diritta e ha le stesse dimensioni dell'oggetto, ma sembra che scambi la destra con la sinistra (→ La Fisica attorno a noi 2).

Notate ora che la natura fisica dell'immagine fornita da uno specchio piano è assai diversa da quella dell'immagine di una camera oscura. Quella della camera oscura è una **immagine reale**: è formata dai raggi provenienti dalla sorgente e quindi può essere raccolta su uno schermo. Quella dello specchio è invece un'**immagine virtuale**: è formata dai prolungamenti all'indietro dei raggi e quindi non può essere raccolta su uno schermo, sebbene sia visibile.

La Fisica attorno a noi 2. Gli specchi scambiano la destra con la sinistra?

Quando ci guardiamo in uno specchio alzando la mano destra, vediamo la nostra immagine che alza la sinistra. Ci sembra cioè che lo specchio scambi la destra con la sinistra. E allora, dato che l'immagine è diritta, è naturale chiedersi perché non si scambino anche l'alto e il basso. Ma in

realtà la mano alzata della nostra immagine non è la sinistra ma la destra, come è facile verificare se muoviamo un dito di questa mano.

L'impressione che uno specchio scambii la destra con la sinistra deriva dalla confusione che si fa tra la disposizione destra-sinistra di un'immagine e la sua orientazione rispetto all'osservatore. Per convincervi di ciò, scrivete una frase sul bordo di un foglio di carta trasparente (o molto sottile) e avvicinatelo a uno specchio in modo da poter vedere sia la scritta sul foglio che la sua immagine: le due scritte si corrisponderanno esattamente.

Figura. Gli specchi non scambiano la destra con la sinistra.

(fotografia del bordo inferiore di foglio di carta sottile con la scritta **SINISTRA DESTRA** disposto al di sopra di uno specchio in modo che si veda sia la scritta sul foglio che la sua immagine)

Esempio 2. Calcoliamo l'altezza del più piccolo specchio verticale che ci riflette interamente. E stabiliamo come va posizionato.

Esaminiamo la figura 18, occupandoci dei raggi provenienti dal punto più basso e da quello più alto del corpo: il raggio AF, che proviene dal punto A in cima al capo, raggiunge gli occhi dopo essere stato riflesso nel punto F dello specchio, che si trova a metà altezza fra A e B; il raggio CF, che proviene dal punto C sulla punta del piede, raggiunge gli occhi dopo essere stato riflesso nel punto F dello specchio, che si trova a metà altezza fra B e D.

L'altezza minima dello specchio che ci riflette interamente in posizione eretta è dunque FH, che per quanto detto è la metà della distanza AC, cioè la metà dell'altezza della persona. Il suo bordo superiore va posizionato a metà altezza fra la cima del capo e gli occhi.

Collegamento con la storia 1. Specchi solidi e specchi liquidi.

I primi specchi usati dall'uomo furono certamente "specchi d'acqua": uno stagno, una pozza d'acqua lasciata dalla pioggia, Ma in seguito si volle disporre di specchi portatili: i primi specchi solidi, ottenuti levigando lastre di minerali vetrosi (ossidiana), risalgono a molti millenni prima di Cristo. In seguito, quando si diffuse la tecnologia dei metalli, si ottennero specchi assai migliori sfruttando le ottime proprietà di riflessione delle superfici metalliche, utilizzando in particolare il bronzo, l'argento e l'oro. La città di Brindisi, in particolare, divenne famosa nel mondo Romano per la fabbricazione di specchi di bronzo.

Gli specchi di vetro si cominciarono a fabbricare soltanto parecchio dopo, a Venezia, nel XIV secolo. Per capire come è fatto uno specchio toccatelo con la punta di una matita: vi accorgete che le posizioni delle due immagini della punta non coincidono. Infatti la riflessione non avviene sulla superficie anteriore del vetro, ma sul sottile strato di metallo che è depositato su quella posteriore. Il vetro serve infatti soltanto a sorreggere e a proteggere il metallo, in particolare evitandone l'ossidazione al contatto con l'aria.

Di recente, tuttavia, si è tornati a impiegare specchi liquidi, sia pure per usi assai particolari. Questi specchi sono realizzati ponendo in rotazione una vaschetta contenente mercurio, la cui superficie, sotto l'azione combinata della forza di gravità e della forza centrifuga, assume la forma di un paraboloide con asse verticale. Si ottiene così uno specchio perfettamente parabolico, altrimenti realizzabile solo assai difficilmente. Che però punta soltanto in direzione fissa: secondo la verticale.

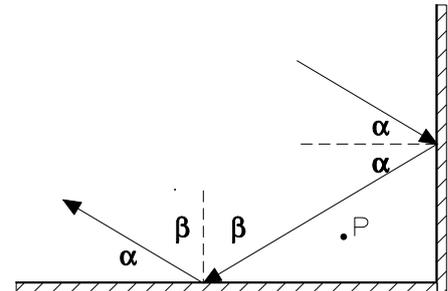
Figura A. Uno specchio etrusco di bronzo....
(Fotografia da trovare e dida da aggiustare)

Figura B. Questo specchio liquido realizzato per impieghi astronomici...
(Fotografia da trovare e dida da aggiustare)

Approfondimento 2. I riflettori angolari e la distanza della Luna.

Un *riflettore angolare bidimensionale* è costituito da due specchi piani disposti ad angolo retto, idealmente di estensione infinita. Quando un raggio di luce colpisce uno dei due specchi con angolo d'incidenza α , viene riflesso con angolo di riflessione α e perciò raggiunge l'altro specchio con angolo di incidenza $\beta = 90^\circ - \alpha$. Questo lo riflette con angolo di riflessione β rispetto alla normale, che è a 90° rispetto alla normale al primo specchio. Sicché il raggio che emerge dal riflettore angolare è sempre parallelo a quello incidente, ma soltanto se quest'ultimo ... (individuare voi stessi la condizione a ciò necessaria).

Quante immagini questo dispositivo fornisce di un oggetto? Potete stabilirlo voi stessi sperimentalmente, procurandovi due specchietti. Oppure ragionando, cioè considerando le immagini del punto P in figura riflesse dai due specchi.



Più elaborato è il *riflettore angolare tridimensionale*, costituito da tre specchi piani disposti ad angolo retto attorno a un vertice comune, che si comporta in tre dimensioni come in due il riflettore considerato prima. Esso cioè riflette all'indietro un raggio luminoso parallelo a quello che lo colpisce, da qualsiasi direzione esso provenga.

I riflettori angolari che gli astronauti hanno lasciato sulla superficie della Luna hanno consentito agli scienziati di misurare la distanza Terra-Luna, lanciando dalla Terra un fascio di luce laser verso la Luna e misurando il ritardo con cui arriva il fascio riflesso. L'accuratezza di queste misure è altissima: pochi centimetri su una distanza totale di 385 000 km. Ripetendole su lunghi intervalli di tempo, è stato possibile stabilire che la Luna si allontana gradualmente dalla Terra, di circa 38 mm all'anno.

Figura 17. L'osservatore vede il punto S come se esso si trovasse nel punto immagine S', dentro allo specchio, dove s'incontrano i prolungamenti all'indietro dei raggi riflessi che provengono dal punto S. Allo stesso modo si costruiscono tutti gli altri punti dell'immagine che l'osservatore vede nello specchio. (Adattare da Hecht, vol. 2, pag. 834, modificata come segue: il viso va esteso a oltre il punto S, che si deve trovare sulla sua superficie; le scritte θ_i e θ_r vanno sostituite con i e r; la scritta P va sostituita con S'; le scritte A e V vanno eliminate, le scritte s_0 e s_1 vanno sostituite con d e d')

Figura 18. Adattare da Hecht, vol. 2, pag. 835, sostituendo il personaggio con una ragazza; eliminando i raggi AELFB, CHM e DIJ; eliminando le scritte C, E, G, I, J, L, K, M; sostituendo le scritte D, F e H con C, E e F; indicando con una freccetta rossa a metà raggio il verso dei raggi a sinistra dello specchio; tratteggiando i raggi a destra)

1.6 Gli specchi curvi

Potete farvi una prima idea del funzionamento degli specchi curvi guardandovi in un cucchiaio di metallo, la cui parte interna è uno **specchio concavo**, quella esterna uno **specchio convesso**. Noterete innanzitutto che le immagini sono alquanto distorte, a differenza di quanto avviene con gli specchi piani. Quando si guarda nella parte esterna del cucchiaio, le immagini sono diritte e rimpicciolite; guardando in quella interna, esse possono essere sia diritte che capovolte, sia ingrandite che rimpicciolite. In generale, uno specchio convesso trasforma un fascio di raggi paralleli in un fascio divergente, uno concavo lo trasforma in un fascio convergente.

Gli specchietti retrovisori delle auto sono specchi convessi. Come la parte esterna di un cucchiaio, essi forniscono immagini diritte e rimpicciolite, in modo da offrire un ampio campo di vista.

Specchi curvi con una geometria ben definita sono gli **specchi sferici**, costituiti da una calotta sferica, cioè una porzione di superficie sferica. La figura 19 a) rappresenta uno specchio sferico concavo: si chiama **asse ottico** la retta passante per il centro della sfera e il vertice dello specchio, *apertura* l'angolo α che definisce l'estensione angolare dello specchio.

Consideriamo ora un fascio di raggi paralleli all'asse ottico che illumina lo specchio, per esempio proveniente da una sorgente luminosa molto distante. Applicando a ciascuno dei raggi le leggi della riflessione, si trova che il fascio riflesso converge, sebbene solo approssimativamente, in

un punto chiamato **fuoco** dello specchio (l'approssimazione è molto buona per i raggi che incidono nella parte centrale dello specchio, meno buona per gli altri). Il fuoco costituisce pertanto l'immagine della sorgente: si tratta di una immagine reale, che può essere raccolta su uno schermo. Il fuoco (F) si trova sull'asse ottico a una distanza dal vertice, che prende il nome di **distanza focale** dello specchio, pari a metà del raggio di curvatura (→ figura 20).

Per ottenere la convergenza esatta nel fuoco per tutti i raggi di un fascio parallelo all'asse ottico occorre usare un **specchio parabolico**, la cui superficie è un paraboloide ottenuto dalla rotazione di una parabola intorno al suo asse di simmetria, che costituisce l'asse ottico dello specchio. Questa è la ragione per cui in tanti impieghi si usano specchi di questa forma particolare, la cui lavorazione è assai meno facile di quelli sferici. Sono parabolici, per esempio, gli specchi usati nei telescopi a riflessione, che raccolgono al meglio la luce di stelle lontane concentrandole poi su una lastra fotografica o su un rivelatore elettronico. Sono parabolici gli specchi usati nei fari delle automobili; questi sono usati all'inverso, grazie al principio di invertibilità dei percorsi ottici: la sorgente luminosa viene posta nel fuoco della parabola per ottenere un fascio di raggi paralleli che illumina la strada senza disperdersi attorno. Sono paraboliche anche le antenne impiegate per ricevere i segnali Tv dai satelliti e quelle usate dai radioastronomi per captare i segnali radio emessi da corpi celesti.

Figura 19. Un fascio di raggi luminosi, paralleli all'asse ottico, illumina uno specchio concavo sferico (a) e uno parabolico (b). Nel primo i raggi riflessi convergono nei pressi del fuoco, nel secondo esattamente nel fuoco. (Adattare da Il Mondo della Fisica, vol. B, pag. 579; ribaltate orizzontalmente, tracciando meno raggi, aggiungendo ottico alla scritta asse)

Figura 20. Il raggio parallelo all'asse ottico che incide nel punto A dello specchio con angolo d'incidenza α passa approssimativamente per il fuoco F dello specchio, la cui distanza FV dal vertice V (*distanza focale*) è pari a metà del raggio di curvatura CV. Infatti il triangolo CAF è isoscele sicché i suoi lati CF e FA sono uguali e il lato FA è approssimativamente uguale a FV. Si capisce che l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è l'angolo α , cioè il raggio incidente è vicino all'asse ottico.

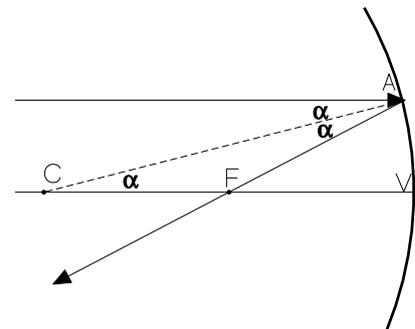


Figura 21. Fotografia da trovare di una grande antenna parabolica (Fucino, Arecibo o Medicina)

1.7 Le immagini degli specchi sferici.

Ci occupiamo ora della costruzione delle immagini di oggetti estesi fornite da uno specchio sferico. Come sapete, l'immagine di un oggetto esteso si ottiene ricavando le immagini dei suoi punti. Queste, per ciascun punto oggetto P, si ottengono individuando il corrispondente punto immagine P' dove s'incontrano due raggi riflessi provenienti da P (o il prolungamento all'indietro di due di essi). Si dimostra infatti che se lo specchio, o in generale un sistema ottico, non distorce le immagini, passerà per P' anche qualsiasi altro raggio proveniente da P, che colpisce lo specchio. *Ciascuna di queste coppie di punti, P e P', prende il nome di punti coniugati*: infatti, per il principio di invertibilità dei percorsi ottici, come il punto immagine P' è raggiunto dai raggi provenienti dal punto oggetto P, così P sarebbe raggiunto dai raggi che provenissero da P'.

Consideriamo ora in particolare la costruzione delle immagini fornite da specchi sferici di piccola apertura, in modo da poter trascurare la distorsione delle immagini. Tale operazione è grandemente facilitata quando si considerano raggi incidenti che hanno direzioni particolari, per i quali è immediato individuare le direzioni dei raggi riflessi corrispondenti. Questi raggi, che chiameremo *raggi principali*, sono mostrati nella figura 22 per uno specchio sferico concavo e per uno convesso:

- i raggi C (rossi in figura), che incidono normalmente allo specchio perché passano per il suo centro C, vengono riflessi all'indietro nella stessa direzione da cui provengono;
- i raggi F (blu in figura), che passano per il fuoco dello specchio, vengono riflessi in direzione parallela all'asse ottico.

A questi possiamo aggiungere i raggi P (verdi in figura) paralleli all'asse ottico, che vengono riflessi nella direzione che passa per il fuoco, percorrendo all'inverso il cammino dei raggi F.

Le costruzioni rappresentate nella figura 23, eseguite con questo metodo, mostrano che le caratteristiche delle immagini di uno specchio concavo dipendono dalla posizione dell'oggetto rispetto allo specchio. In particolare, quando l'oggetto si trova oltre il centro dello specchio (a), l'immagine è reale, capovolta e ingrandita; quando si trova fra il centro e il fuoco (b), l'immagine è reale, capovolta e rimpicciolita; quando si trova fra lo specchio e il fuoco (c), l'immagine è virtuale, diritta e ingrandita.

Il caso di uno specchio convesso, rappresentato in figura 24 è più semplice: qui le immagini sono sempre virtuali, diritte e rimpicciolite, dovunque sia posto l'oggetto. Ciò è in accordo col fatto che i raggi che colpiscono lo specchio vengono comunque deviati in modo da divergere, sicché l'immagine è sempre definita dai prolungamenti all'indietro dei raggi riflessi.

Perché quando l'oggetto si trova molto vicino a uno specchio sferico (più precisamente fra lo specchio e il fuoco) l'immagine è virtuale e diritta sia esso concavo o convesso? Perché in tal caso lo specchio si comporta, sia pure approssimativamente, come uno specchio piano.

La formula dei punti coniugati per gli specchi sferici

La posizione del punto immagine P' di un punto oggetto P per uno specchio sferico concavo può essere ottenuta, oltre che con metodi geometrici, anche utilizzando la seguente relazione algebrica chiamata **formula dei punti coniugati**, anch'essa basata sulle leggi della riflessione (→ Approfondimento 3):

$$(4) \quad 1/p + 1/q = 1/f$$

dove p è la distanza del punto oggetto dal vertice dello specchio (**per ora scelta in modo che l'immagine sia reale**), q è la distanza del punto immagine dal vertice dello specchio e f è la distanza focale dello specchio. Esaminando la formula (4) si osserva che essa è simmetrica in p e q; ciò significa che è verificata anche quando si scambiano le posizioni dell'oggetto e dell'immagine, che infatti sono due punti coniugati fra loro. Si osserva poi che, fissato f, quanto più p è grande (cioè l'oggetto è lontano) tanto più q è piccolo (cioè l'immagine è vicina allo specchio); più precisamente, quando p tende all'infinito, e quindi 1/p tende a zero, q tende a f cioè, come già sapevamo, l'immagine di un punto all'infinito si forma nel fuoco di uno specchio concavo.

E se l'immagine è virtuale, perché il punto oggetto si trova fra il fuoco e lo specchio? La posizione dell'immagine che si ricava dalla formula (4), $q = 1/(1/f - 1/p)$, in questo caso è un numero negativo, dato che p è minore di f e quindi 1/p è maggiore di 1/f. Per esempio, se abbiamo $f = 1$ m, e $p = 0,5$ m, otteniamo: $q = 1/(1 - 2) = -1$ m. Il segno negativo di q s'interpreta così: l'immagine non è reale, ma virtuale, e quindi il punto immagine si trova dall'altra parte dello specchio, a distanza |q| dal vertice.

Esempio 4. Dove mettiamo la candela?

Vogliamo proiettare l'immagine di una candela su uno schermo che si trova a 1,5 metri di distanza da uno specchio sferico concavo con raggio di curvatura $r = 40$ cm. Dove dobbiamo disporre la candela? L'immagine sarà diritta o capovolta?

La distanza focale dello specchio è $f = r/2 = 0,4/2 = 0,2$ m. La distanza q dell'immagine dallo specchio è $q = 1,5$ m. Dalla formula (4) ricaviamo la distanza p dallo specchio a cui va posta la candela: $p = 1/(1/f - 1/q) = 1/(1/0,2 - 1/1,5) = 0,231$ m. Così l'oggetto si trova fra il fuoco e il centro dello specchio concavo e quindi l'immagine è reale e diritta.

Esempio 5. Qual è il raggio di curvatura dello specchio?

Vogliamo calcolare il raggio di curvatura di uno specchio sferico concavo, che fornisce a 4,3 metri di distanza dallo specchio l'immagine di un oggetto che si trova a 30 cm da esso.

Ricaviamo la distanza focale dello specchio dalla formula (4), dove poniamo $q = 4,3$ m, $p = 0,3$ m:

$f = 1/(1/p + 1/q) = 1/(1/0,3 + 1/4,3) = 0,28$ m. Quindi il raggio di curvatura dello specchio è $r = 2f = 2 \times 0,28 = 0,56$ m.

Approfondimento 3. Dimostriamo la formula dei punti coniugati per uno specchio sferico concavo.

La figura A rappresenta la costruzione dell'immagine reale P' del punto oggetto P per uno specchio sferico concavo. Il punto immagine P' si trova nell'intersezione dei raggi riflessi nel punto R e nel vertice V dello specchio. La bisettrice

dell'angolo PRP' è evidentemente la normale allo specchio in R, che quindi passa per il centro C dello specchio. Essa pertanto suddivide il lato PP' del triangolo PRP' in parti proporzionali alla lunghezza dei lati adiacenti:

$$CP'/PC = P'R/PR$$

Se l'apertura dello specchio è piccola, possiamo assumere che le lunghezze PR e P'R siano uguali rispettivamente a PV e P'V, ottenendo quindi dalla precedente:

$$CP'/PC = P'V/PV$$

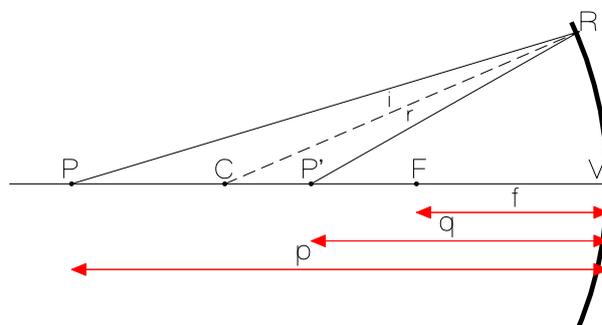
Chiamando p la distanza PV del punto oggetto P dal vertice V dello specchio e q la corrispondente distanza P'V del punto immagine P', e ricordando che il raggio di curvatura ($r = CV$) è il doppio della distanza focale f ($f = FV$), dalla precedente ricaviamo:

$$(2f - q)/(p - 2f) = q/p$$

Da questa, moltiplicando ambo i membri per $(p - 2f)/qf$, si ottiene infine la seguente relazione fra la posizione p dell'oggetto, quella q dell'immagine e la distanza focale f, cioè la *formula dei punti coniugati*:

$$1/p + 1/q = 1/f$$

Figura A. Lo specchio concavo forma l'immagine P' del punto oggetto P. Il punto P si trova a distanza p dallo specchio; il punto P' a distanza q. Queste distanze sono legate alla distanza focale f dalla formula dei punti coniugati.



E se lo specchio è convesso? Anche in questo caso la formula (4) resta valida, purché si attribuiscono alle grandezze in gioco segni opportuni e si interpreti opportunamente il segno dei risultati che essa fornisce. Più precisamente, per qualsiasi specchio sferico

- la distanza focale f è positiva per uno specchio concavo (dove i raggi paralleli convergono nel fuoco), negativa per uno convesso (dove nel fuoco convergono i prolungamenti dei raggi);
- la distanza q è positiva se l'immagine è reale, negativa se è virtuale;
- la distanza p è positiva se l'oggetto è reale (cioè sempre, se si tratta di un oggetto fisico), negativa se è virtuale (cioè quando l'oggetto è a sua volta una immagine, fornita da altri dispositivi).

L'ingrandimento delle immagini

Abbiamo visto che gli specchi sferici forniscono, a seconda dei casi, immagini ingrandite o rimpicciolite. Questa caratteristica si formalizza definendo l'**ingrandimento lineare I** come rapporto fra la lunghezza A'B' dell'immagine e quella AB dell'oggetto:

$$I = A'B'/AB$$

Tale grandezza dipende dalla posizione dell'oggetto e da quella dell'immagine secondo la relazione:

$$(5) \quad I = -q/p$$

Notate che si parla di "ingrandimento" anche quando l'immagine in effetti è rimpicciolita. Così come del resto il vantaggio di una leva è definito anche quando la leva è svantaggiosa.

Tale espressione, nel caso particolare di uno specchio concavo che fornisce un'immagine reale, si ricava immediatamente dalla similitudine fra i triangoli ABV e A'B'V in figura 25, tenendo presente che gli angoli i ed r sono uguali e che le frecce AB e A'B' sono dirette in versi opposti. Notate che nel caso in figura le grandezze p e q sono entrambe positive, e quindi l'ingrandimento I risulta negativo: ciò sta a indicare che l'immagine è capovolta.

Si può dimostrare che la formula (5) è valida in generale, per specchi sferici concavi o convessi e per immagini reali o virtuali, purché si seguano le convenzioni per i segni date sopra e si tenga presente che un valore positivo dell'ingrandimento I indica che l'immagine è diritta, un valore negativo che è capovolta.

La tabella che segue riassume le proprietà essenziali delle immagini fornite dagli specchi sferici, che si ottengono dalle formule (4) e (5).

Tabella 2. Proprietà delle immagini fornite da specchi sferici con distanza focale f .

Distanza p fra immagine e specchio	Distanza q fra immagine e specchio (ha segno negativo quando l'immagine si forma oltre lo specchio)	Ingrandimento lineare I (ha segno negativo per le immagini capovolte)	Proprietà dell'immagine
Specchi concavi			
$p \rightarrow \infty$	$q = f$	$I = 0$	reale, puntiforme
$p > 2f$	$f < q < 2f$	$-1 < I < 0$	reale, capovolta e rimpicciolita
$p = 2f$	$q = 2f$	$I = -1$	reale, capovolta e con dimensioni uguali a quelle dell'oggetto
$f < p < 2f$	$q > 2f$	$I < -1$	reale, capovolta e ingrandita
$p = f$	in questa condizione l'immagine non è definita		
$p < f$	$q < 0$	$I > 1$	virtuale, diritta e ingrandita
Specchi convessi			
qualsiasi	$q < 0$	$0 < I < 1$	virtuale, diritta e rimpicciolita

Esempio 4. Quanto è grande l'asteroide?

Un asteroide sta orbitando attorno alla Terra, a 400 km di altezza. La sua immagine, fotografata con un telescopio dotato di uno specchio sferico concavo con raggio di curvatura di 5 metri, ha un diametro di 3,2 mm. Vogliamo calcolare il diametro dell'asteroide e dove si forma la sua immagine rispetto allo specchio.

Conoscendo $p = 4 \cdot 10^5$ m e $f = r/2 = 2,5$ m, ricaviamo la distanza dell'immagine dallo specchio dalla formula (4): $q = 1/(1/f - 1/p) = 1/(1/2,5 - 1/4 \cdot 10^5) = 2,5$ m. Calcoliamo l'ingrandimento applicando la formula (5): $I = q/p = 2,5/4 \cdot 10^5 = 6,25 \cdot 10^{-6}$. Sicché il diametro dell'asteroide è $3,2 \cdot 10^{-3}/I = 512$ m.

Esempio 5. L'immagine del naso.

(vignetta da fare: un ragazzo si guarda il naso in uno specchio (poco) convesso)

Vogliamo determinare le caratteristiche dell'immagine che si ottiene ponendo il naso a 15 cm da uno specchio sferico convesso con raggio di curvatura $r = 1$ m.

La distanza focale dello specchio è $r/2$, a cui attribuiamo segno negativo, dato che si tratta di uno specchio convesso: $f = -r/2 = -0,5$ m. Conoscendo f e sapendo che la distanza dell'oggetto dallo specchio è $p = 0,15$ m, ricaviamo la distanza dell'immagine dallo specchio dalla formula (4):

$q = 1/(1/f - 1/p) = 1/(-1/0,5 - 1/0,15) = -0,115$ m = -11,5 cm, dove il segno negativo indica che

l'immagine è virtuale e si forma al di là dello specchio. Per calcolare l'ingrandimento utilizziamo la

formula (5): $I = -q/p = -(-0,115/0,15) = 0,767$, dove il segno positivo indica che l'immagine è diritta.

Controlliamo qualitativamente questi risultati esaminando l'ultima riga della tabella 2, da cui risulta appunto che l'immagine deve essere virtuale, diritta e rimpicciolita.

Figura 22. I cosiddetti raggi principali sono di grande aiuto nella costruzione delle immagini. Nella figura sono rappresentati in rosso i raggi che passano per il centro dello specchio (o che vi passano i loro prolungamenti) e vengono riflessi all'indietro nella stessa direzione; in blu quelli che passano per il fuoco (o che vi passano i loro prolungamenti) e vengono riflessi parallelamente all'asse ottico; in verde quelli che incidono parallelamente all'asse ottico e vengono riflessi attraverso il fuoco.

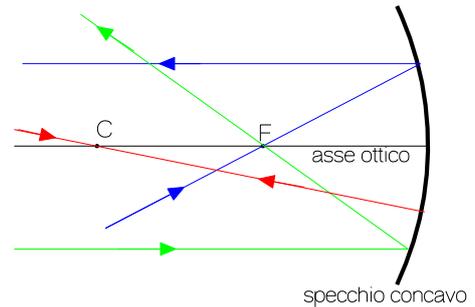


Figura 23. Costruzione delle immagini fornite da uno specchio concavo con il metodo dei raggi principali. Queste sono reali, capovolte e rimpicciolite quando l'oggetto si trova oltre il centro C dello specchio; reali, capovolte e ingrandite, quando l'oggetto si trova fra il centro C e il fuoco F; virtuali, diritte e ingrandite, quando l'oggetto si trova fra il fuoco F e lo specchio.

(Adattare da Amaldi, La Fisica 2, pag. 292, scambiando A con B e viceversa nelle scritte e utilizzando colori che facilitino la lettura dei grafici)

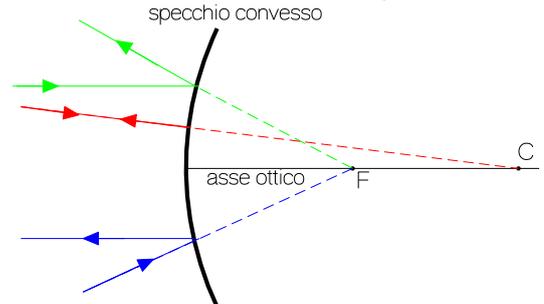


Figura 24. Costruzione delle immagini fornite da uno specchio convesso con il metodo dei raggi principali. Queste sono sempre virtuali, diritte e rimpicciolite, qualunque sia la posizione dell'oggetto.

(Adattare da Amaldi, La Fisica 2, pag. 293, soltanto la parte a destra, scambiando A con B e viceversa nelle scritte e utilizzando colori che facilitino la lettura dei grafici)

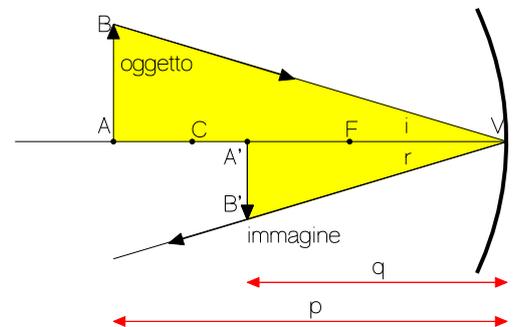


Figura 25. L'ingrandimento lineare $A'B'/AB$ è dato dal rapporto p/q . I due triangoli rettangoli in giallo sono infatti simili, dato che gli angoli r ed i sono uguali.

1.8 La rifrazione della luce

Guardando di fianco un bicchiere di vetro riempito d'acqua dove è immersa una matita, questa ci appare spezzata. Riempendo d'acqua una vaschetta opaca dove sul fondo si trova una moneta, questa appare d'un tratto alla nostra vista (\rightarrow figura 26). Queste curiose osservazioni, e altre simili, trovano spiegazione nel fenomeno della rifrazione, cioè nel cambiamento di direzione che subiscono i raggi luminosi quando passano da un mezzo trasparente a un altro.

Ricordiamo infatti (\rightarrow pag. xxx) che qualsiasi onda viene bruscamente deviata quando passa da un mezzo a un altro nel quale la sua velocità di propagazione sia diversa, cioè, nel caso delle onde luminose, fra due mezzi trasparenti con indici di rifrazione differenti (\rightarrow §3), come avviene nel passaggio dall'aria all'acqua, dall'aria al vetro, ... In questi casi alla deviazione dei fronti d'onda si accompagna una corrispondente deviazione dei raggi, ad essi perpendicolari.

Il fenomeno del passaggio di un raggio di luce (\rightarrow figura 27) da un mezzo con indice di rifrazione n_1 , dove la velocità della luce è $v_1 = c/n_1$, a un altro con indice di rifrazione n_2 , dove la velocità della luce è $v_2 = c/n_2$, è descritto dalle due seguenti **leggi della rifrazione**, la seconda delle quali è chiamata *legge di Snell-Cartesio*.

- Il raggio incidente, quello rifratto e la normale alla superficie di separazione giacciono in uno stesso piano;

- L'angolo d'incidenza i e quello di rifrazione r sono legati dalla relazione:

$$(6) \quad \text{sen } i / \text{sen } r = v_1 / v_2 = n_2 / n_1$$

Questa relazione può essere verificata sperimentalmente con il dispositivo illustrato nella figura 28, che permette di misurare l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione al variare dell'inclinazione del fascetto di luce inviato sulla superficie del vetro.

Vediamo di capire qualche conseguenza della formula (6). La prima è che quando il raggio incide normalmente alla superficie, essendo $i = 0$, si ha $\sin i = 0$, $\sin r = 0$, $r = 0$, e quindi il raggio rifratto non subisce deviazione, per qualsiasi valore degli indici di rifrazione. Notiamo poi che quando il secondo mezzo è più rifrangente del primo, cioè il suo indice di rifrazione è maggiore di quello del primo mezzo, si ha $\sin r < \sin i$ e quindi anche $r < i$, cioè il raggio rifratto devia avvicinandosi alla normale; come nel caso in figura 27. E naturalmente avviene l'opposto nel caso contrario. Ma questo caso, come vedremo presto, riserva una sorpresa interessante.

Esempio 6. La rifrazione di un raggio di luce nell'acqua, nel vetro e nel diamante.

Vogliamo calcolare la rifrazione che subisce un raggio luminoso quando passa dall'aria nell'acqua, nel vetro, e nel diamante, con angolo d'incidenza di 60° .

Ricaviamo l'angolo di rifrazione r dalla formula (6): $r = \arcsin[(n_1/n_2) \sin i]$ dove n_1 è l'indice di rifrazione dell'aria, che approssimiamo all'unità ($n_1 = 1$), e n_2 quello del mezzo dove si propaga il raggio rifratto. I valori di n_2 , ottenuti dalla tabella 1, sono i seguenti: $n_{\text{acqua}} = 1,333$; $n_{\text{vetro}} = 1,5$; $n_{\text{diamante}} = 2,417$. Si ha pertanto, essendo $\sin 60^\circ = 0,866$: $r_{\text{acqua}} = \arcsin(0,866/1,333) = 40,5^\circ$, $r_{\text{vetro}} = \arcsin(0,866/1,5) = 35,3^\circ$, $r_{\text{diamante}} = \arcsin(0,866/2,417) = 21,0^\circ$. Notate che la deviazione del raggio è tanto maggiore quanto più rifrangente è il secondo mezzo.

Cosa significa $\arcsin(x)$? Questa notazione rappresenta la funzione *arcoseno*, che è la *funzione inversa* della funzione seno. Per un dato valore di x , $\arcsin(x)$ rappresenta quindi il valore dell'angolo il cui seno è x . Usando una calcolatrice, assicuratevi che essa sia predisposta per fornire il valore dell'angolo nelle unità desiderate (gradi o radianti).

Esempio 7. Come varia la deviazione del raggio rifratto al variare dell'angolo d'incidenza?

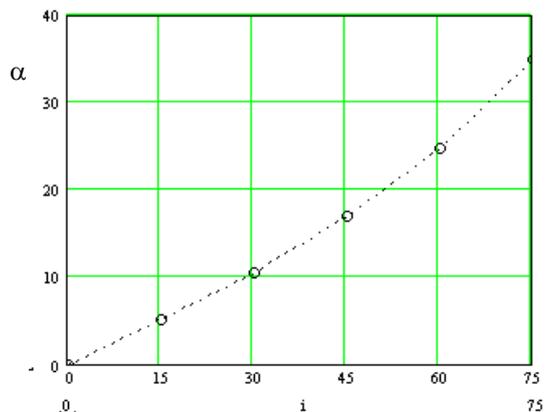
Vogliamo tracciare un grafico della deviazione che subisce il raggio rifratto rispetto a quello incidente al variare dell'angolo d'incidenza nel passaggio dall'aria al vetro.

Ricaviamo l'angolo di rifrazione r dalla formula (6): $r = \arcsin[(n_1/n_2) \sin i]$ dove n_1 è l'indice di rifrazione dell'aria, che approssimiamo all'unità ($n_1 = 1$), e $n_2 = 1,5$ quello del vetro, ottenendo $r = \arcsin[(\sin i)/1,5]$. La deviazione che subisce il raggio rifratto è data dalla differenza fra l'angolo di rifrazione r e quello d'incidenza i , della quale indichiamo con α il valore assoluto: $\alpha = |r - i|$.

Eseguiamo il calcolo per i seguenti valori di i : 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , riportando i risultati nella tabella e nel grafico.

angolo di incidenza i	angolo di rifrazione r	deviazione α del raggio
0°	0°	0°
15°	$9,9^\circ$	$5,1^\circ$
30°	$19,5^\circ$	$10,5^\circ$
45°	$28,1^\circ$	$16,9^\circ$
60°	$35,3^\circ$	$24,7^\circ$
75°	$40,1^\circ$	$34,9^\circ$

(tutti i valori numerici riportati sugli assi del grafico vanno indicati in gradi, cioè per esempio sostituendo 15 con 15°)



Approfondimento 4. Il bagnino e il principio di Fermat.

Il bagnino, mentre riposa nel punto P in figura, ode le grida di un bagnante in difficoltà nel punto P'. Si precipita allora al salvataggio, prima correndo e poi nuotando; però non in linea retta, ma seguendo il percorso tratteggiato, cioè allungando il tragitto sulla spiaggia, che egli percorrerà velocemente, e accorciando quello che percorrerà nuotando, più lentamente. Il bagnino, che

conosce il principio di Fermat, ha scelto infatti il percorso che richiede il tempo minimo per raggiungere il bagnante.

Il **principio di Fermat**, formulato attorno al 1650 dal matematico francese Pierre de Fermat (1601-1665), stabilisce che la luce, fra tutti i possibili percorsi che può compiere per andare da un punto a un altro, sceglie sempre quello che richiede il *tempo minimo*. Questo è anche il percorso più breve soltanto se viene compiuto a velocità costante, come avviene nel caso della riflessione. Quando invece il percorso attraversa mezzi dove la velocità della luce è diversa, come nel caso della rifrazione, la minimizzazione del tempo totale di percorrenza impone di allungare il tragitto nel mezzo dove la luce è più veloce per poterlo accorciare dove è più lenta.

E' davvero affascinante pensare che un enunciato semplicissimo, come il principio di Fermat, può esser posto a base di tutta l'ottica geometrica, dato che da esso si possono ricavare le leggi della riflessione e della rifrazione.

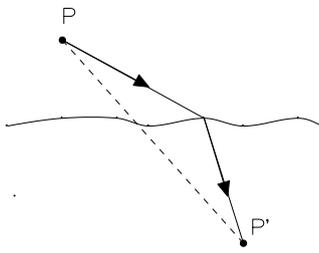


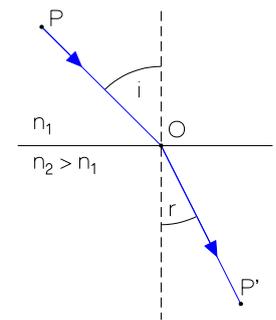
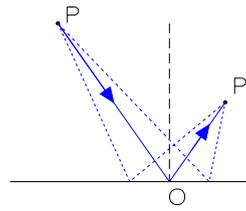
Figura A. Perché il bagnante non si precipita in linea retta verso il bagnante in difficoltà, ma segue un percorso più

lungo?

(adattare lo schizzo: in alto la spiaggia, in basso il mare)

Figura B. a) Nella riflessione, il percorso che richiede il tempo minimo da P a P' è anche quello più breve, cioè quello per cui gli angoli di incidenza e di riflessione sono uguali. b) Quando i punti P e P' si trovano in mezzi nei quali la velocità della

luce è diversa, il percorso del raggio di luce da P a P' non è il più corto, ma quello che il raggio percorre nel tempo più breve. Esattamente quello stabilito dalla seconda legge della rifrazione. Provate a dimostrarlo.



La riflessione totale

Mettiamoci nei panni di un pesce e guardiamo verso la superficie del mare. Se la situazione è quella illustrata nella figura 29, noi vedremo i raggi rifratti provenienti dal battello e dal gabbiano, che ci appariranno in posizioni diverse da quelle reali, e dall'aereo, che ci apparirà nella posizione giusta dato che si trova sulla nostra verticale. Ma vedremo anche galleggiare nell'aria il piccolo pesce che si trova alla nostra sinistra: perché? Il fatto è che i raggi provenienti dal pescetto incontrano la superficie di separazione acqua-aria con un angolo d'incidenza a cui non corrisponde alcun angolo di rifrazione in base alla formula (6), e quindi vengono riflessi nell'acqua da cui provenivano.

Infatti nel passaggio da un mezzo a uno più rifrangente ($n_2 > n_1$) tutti i raggi vengono rifratti (e parzialmente riflessi), qualunque sia il loro angolo di incidenza; invece nel caso opposto ($n_2 < n_1$), come nel passaggio dall'acqua all'aria, alcuni raggi vengono rifratti (e parzialmente riflessi) ma altri, con determinate inclinazioni, non vengono rifratti ma riflessi totalmente dando luogo al fenomeno chiamato appunto **riflessione totale**. Più precisamente vengono rifratti, e dunque penetrano nel secondo mezzo, soltanto i raggi con angolo d'incidenza minore del cosiddetto *angolo limite* α_L , che dipende dagli indici di rifrazione dei due mezzi.

Il fenomeno della riflessione totale si capisce esaminando la figura 30. I raggi emessi dalla sorgente immersa nell'acqua, incontrando la superficie di separazione, vengono rifratti (e parzialmente riflessi) con angoli di rifrazione via via crescenti all'aumentare del loro angolo d'incidenza; ma non tutti: quelli il cui angolo d'incidenza è maggiore del raggio che viene rifratto orizzontalmente vengono infatti totalmente riflessi. L'angolo limite α_L è dunque quel particolare angolo di incidenza i per cui l'angolo di rifrazione vale 90° . Dalla formula (6), ponendo $r = 90^\circ$ ed essendo $\sin 90^\circ = 1$, si ha: $1/\sin \alpha_L = n_1/n_2$ da cui si ricava:

$$(7) \quad \alpha_L = \arcsin(n_2/n_1)$$

dove n_1 è l'indice di rifrazione del mezzo più rifrangente, da cui proviene il raggio, e n_2 quello del mezzo meno rifrangente. Per esempio, nel passaggio dall'acqua all'aria l'angolo limite vale $\arcsen(1/1,333) = 48,6^\circ$; in quello dal vetro all'aria, $\arcsen(1/1,5) = 41,8^\circ$

Esempio 8. Calcoliamo l'angolo limite nel passaggio dal diamante all'acqua.

Calcoliamo l'angolo limite per un raggio che passa dal diamante all'acqua utilizzando la formula (7), dove l'indice di rifrazione del diamante è $n_2 = 2,417$ e quello dell'acqua è $n_1 = 1,333$:

$$\alpha_L = \arcsen(n_1/n_2) = \arcsen(1,333/2,417) = 33,5^\circ.$$

La fisica della tecnologia 1. Le fibre ottiche.

Il fenomeno della riflessione totale trova numerosi impieghi. I più importanti sono certamente quelli riguardanti le **fibre ottiche**: lunghi cilindretti di vetro o di plastica, delle dimensioni di un capello, nei quali un raggio di luce si propaga attraverso una serie di riflessioni totali sulle loro pareti interne molto lisce e regolari.

Le fibre ottiche sono usate in medicina per osservare gli organi che si trovano all'interno del corpo, portandone l'immagine all'esterno (*endoscopia*). In questo caso occorre anche illuminare l'oggetto mediante un'altra fibra che porta luce all'interno del corpo.

L'impiego principale delle fibre ottiche riguarda le comunicazioni a distanza, dove esse sostituiscono assai vantaggiosamente i tradizionali cavi elettrici: il vetro usato nelle fibre è assai più economico del rame, le cui riserve sono limitate; le fibre non sono soggette a interferenze e a disturbi elettrici; i cavi ottici sono assai più leggeri e meno ingombranti di quelli elettrici; la capacità di trasmissione è estremamente maggiore: fino oltre 10 Gbit/s, cioè 10 miliardi di segnali binari elementari al secondo. E infatti oggi i cavi costituiti da fibre ottiche sono usati largamente, sia come parte essenziale della rete Internet, sia nelle comunicazioni attraverso gli oceani.

I segnali che si vogliono trasmettere – conversazioni telefoniche, programmi Tv, dati informatici - vengono codificati in una sequenza di brevissimi lampi di luce, che le fibre trasmettono da un luogo a un altro, dove poi vengono trasformati nuovamente nella forma originale. Le migliori fibre usate oggi attenuano i segnali luminosi solo assai debolmente, meno di 1 dB/km, consentendo così l'impiego di tratte di grande lunghezza.

Figura A. La luce lanciata in una estremità di una fibra ottica fuoriesce dall'altro estremo dopo aver subito una serie di riflessioni totali sulle sue pareti interne, anche quando fibra non è diritta. Le fibre usate nelle comunicazioni a distanza sono costituite da un *nucleo* interno di vetro purissimo con diametro fra 10 e 50 μm , dove viaggia il segnale luminoso, che è circondato un mantello cilindrico, fatto di un vetro con indice di rifrazione più basso per assicurare la riflessione totale sulle pareti del nucleo, e da un ulteriore strato di plastica che conferisce robustezza all'insieme.

(Adattare da Fisica per tutti, pag. 289)

La Fisica attorno a noi 3. Il raggio verde, il Sole sotto l'orizzonte e i miraggi.

Sappiamo che la pressione atmosferica, dovuta al peso della colonna d'aria sovrastante, diminuisce gradualmente all'aumentare della quota. Con essa diminuisce sia la densità dell'aria che il suo indice di rifrazione. Da ciò conseguono fenomeni interessanti quando il Sole è molto basso sull'orizzonte e i raggi solari, man mano che penetrano nell'atmosfera, subiscono rifrazione venendo deflessi verso il basso. Una conseguenza di questa deflessione è che, al tramonto, continuiamo a vedere il Sole anche per parecchi minuti dopo che è tramontato. Un'altra è che il Sole appare leggermente ovalizzato, perché i raggi che viaggiano più vicino alla superficie terrestre vengono deflessi maggiormente. La conseguenza più spettacolare, ma che si osserva solo di rado, sul mare, è il cosiddetto "raggio verde", dovuto al fatto che l'indice di rifrazione dell'aria è diverso, sebbene pochissimo, per le luci dei diversi colori: un attimo dopo che l'immagine rossa del Sole è calata sotto l'orizzonte, si vede brevemente una parte della sua immagine alle lunghezze d'onda più brevi, che si manifesta appunto come un raggio verde.

Quando il terreno è molto caldo, come in un deserto o su una strada asfaltata sotto il Sole, l'aria immediatamente sopra il suolo si riscalda fortemente a sua volta, diventando meno densa e

perciò meno rifrangente di quella più in alto. Avviene allora che a noi arriva una doppia immagine degli oggetti lontani: una diritta, costituita dai raggi che viaggiano orizzontalmente, un'altra capovolta, il *miraggio*. Quest'ultima è formata dai raggi inclinati verso il basso che nella rifrazione vengono gradualmente deviati fino a subire un riflessione totale che li incurva verso l'alto fino a raggiungere anch'essi la nostra vista, che li interpreta come provenienti dal basso. E quindi abbiamo l'impressione della presenza di uno specchio d'acqua, nel deserto, o di una pozza d'acqua, su una strada asfaltata.

Figura A. La densità dell'aria, e con essa l'indice di rifrazione, diminuisce gradualmente con l'altezza rispetto alla superficie terrestre. I raggi del Sole, quando attraversano l'atmosfera, vengono quindi deviati leggermente verso il basso sicché noi lo vediamo anche quando è sceso sotto l'orizzonte.
(adattare da www.physics.utoledo.edu/~lsa/_color/12_mirages.htm)

Figura B. L'aria in prossimità del suolo si riscalda fortemente, diventando meno densa e meno rifrangente di quella sovrastante. Quando il gradiente di temperatura supera i 3 o 4 gradi/metro si può osservare un miraggio. Cioè vediamo gli oggetti lontani oltre che diritti anche capovolti, percependoli quindi come riflessi da uno specchio d'acqua.
(adattare da Caforio, Fisica 2, pag. 113, oppure fotografia ripresa su una strada asfaltata)

Figura 26. **Esperimento.** Ponete una moneta sul fondo di un bicchiere di plastica opaca e allontanatevi quanto basta perché il bordo del bicchiere la nasconda. Ma la moneta riapparirà, come se venisse a galla, quando verserete dell'acqua nel bicchiere. I vostri occhi verranno infatti raggiunti dai raggi provenienti dalla moneta, rifratti al passaggio dall'acqua all'aria.
(adattare da Scienza della Materia, vol. 2, pag. 304)

Figura 27. Il raggio che incide sulla superficie di separazione fra l'aria e l'acqua viene rifratto, cioè deviato dalla sua traiettoria. Il raggio si piega avvicinandosi alla normale perché l'acqua è più rifrangente dell'aria ($n_{\text{acqua}} = 1,333$, $n_{\text{aria}} \approx 1$).
(adattare lo schizzo colorandone la parte inferiore, escluso il cerchio giallo, di celeste sfumato verso il basso)

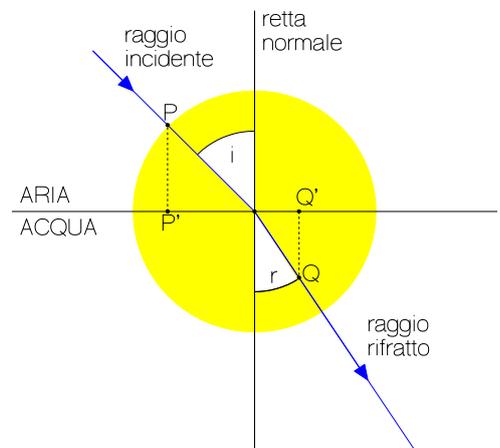


Figura 28. Il dispositivo nella fotografia permette di studiare la seconda legge della rifrazione variando l'inclinazione del fascetto inviato sul vetro. Notate che l'angolo di rifrazione è minore di quello d'incidenza perché l'indice di rifrazione del vetro è maggiore di quello dell'aria, in accordo con la formula (6). Quando invece il raggio rifratto esce dal vetro, esso prosegue indisturbato perché incide perpendicolarmente alla sua superficie. Notate anche la presenza del debole fascetto di luce riflesso dalla superficie del vetro.
(fotografia come in Caforio, Fisica 2, pag. 104)

Figura 29. Il pesce a destra, guardando verso l'alto, vede l'aereo nella posizione giusta, il gabbiano e il battello in posizioni diverse da quelle reali, ma vede addirittura nuotare nell'aria il piccolo pesce che si trova alla sua sinistra. I raggi provenienti da esso subiscono infatti riflessione totale sulla superficie di separazione acqua-aria perché il loro angolo d'incidenza è maggiore dell'angolo limite.
(Adattare da Amaldi La Fisica, vol. 2, pag. 301, ribaltata da destra a sinistra, sostituendo la nave con una barca a vela)

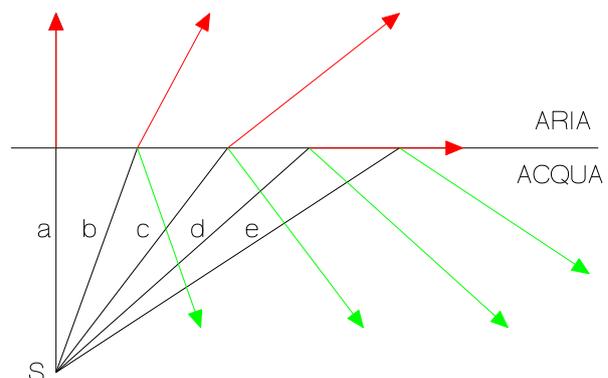


Figura 30. La sorgente immersa nell'acqua emette raggi in tutte le direzioni. Il raggio a passa indisturbato dall'acqua all'aria (sapete spiegare perché?), mentre i raggi b e c, quando raggiungono la superficie di separazione acqua-aria, vengono rifratti e parzialmente riflessi. L'angolo d'incidenza del raggio d, che viene rifratto orizzontalmente ($r = 90^\circ$), è chiamato angolo limite. Il raggio e, con angolo d'incidenza maggiore dell'angolo limite, viene riflesso totalmente.

1.9 Le lastre e i prismi

Un raggio di luce che attraversa una *lastra* di vetro, o di qualsiasi altro materiale trasparente, viene rifratto due volte: prima dall'aria al vetro e poi dal vetro all'aria. Comunque il raggio incida sulla lastra, il raggio che ne esce ha esattamente la stessa direzione del raggio incidente, e infatti attraverso il vetro di una finestra ci si vede benissimo. Ciò avviene perché le due facce della lastra sono parallele, e allora nella seconda rifrazione l'angolo d'incidenza coincide con l'angolo di rifrazione della prima e quindi l'angolo di rifrazione finale coincide con l'angolo d'incidenza iniziale.

Ciò non avviene, invece, quando le due superfici sono piane ma non parallele, come nei *prismi*, oppure sono curve, come avviene nelle *lenti*: in entrambi i casi i raggi vengono deviati. In un prisma retto a sezione triangolare questa deviazione, rappresentata dall'angolo δ in figura 31, aumenta al crescere sia dell'angolo α fra le due facce del prisma sia del rapporto n_2/n_1 fra il suo indice di rifrazione e quello dell'aria. Per piccoli valori di α e degli angoli d'incidenza e rifrazione, si può dare la seguente espressione approssimata per l'angolo di deviazione:

$$(8) \quad \delta = \alpha(n_2/n_1 - 1)$$

I prismi sono spesso usati sfruttandone la riflessione totale, cioè come specchi di altissima qualità ottica, per esempio nei binocoli e nei *periscopi* (figura 32), gli strumenti che consentono la visibilità da una posizione nascosta (una trincea, l'interno di un sottomarino, ...). Sia nei binocoli che nei periscopi si utilizzano due prismi la cui sezione è un triangolo rettangolo: quando vengono colpiti da un raggio perpendicolare a una faccia cateto l'angolo d'incidenza del raggio sulla faccia ipotenusa è 45° , maggiore dell'angolo limite vetro-aria, e quindi il raggio è totalmente riflesso in direzione normale all'altra faccia cateto, da cui fuoriesce.

Figura 31. a) I raggi che attraversano una lastra di vetro mantengono la loro direzione, ma subiscono uno spostamento (che si annulla quando il raggio è normale alla lastra). b) Attraversando un prisma, i raggi vengono deviati perché le sue facce non sono parallele. Quesito: quanto varrebbe l'angolo di deviazione δ se l'angolo α del prisma tendesse a zero?

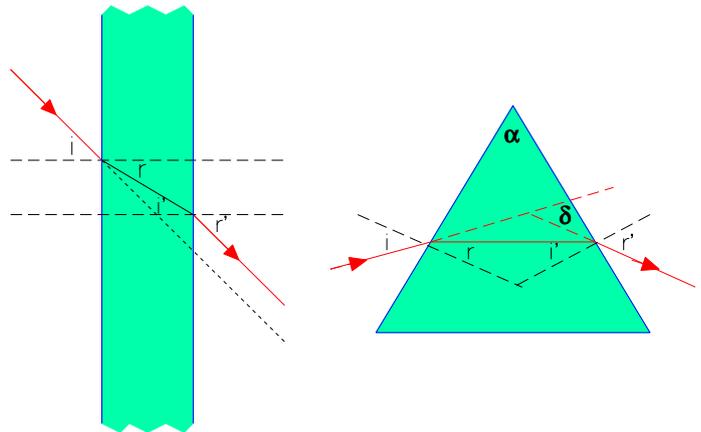


Figura 32. Schema di un periscopio, usato per esempio per consentire la visione dall'interno di un sottomarino in immersione. Questo strumento sfrutta la riflessione totale sulle facce ipotenusa di due prismi la cui sezione è un triangolo rettangolo. (Adattare da Il Mondo della Fisica, tomo B, pag. 582, eliminando la parte b e la scritta O, colorando in rosso il percorso del raggio)

1.10 Le lenti

Una lente è un pezzo di materiale trasparente, vetro o plastica, racchiuso fra due superfici curve, oppure una curva e una piana. Le lenti più comuni sono le **lenti sferiche**, delimitate appunto da superfici sferiche. La retta che congiunge i centri di queste superfici è l'**asse ottico** della lente. Attraversando una lente, un raggio di luce viene rifratto due volte, dall'aria al vetro e dal vetro all'aria: il raggio emergente risulta quindi deviato rispetto a quello incidente dato che le superfici che attraversa non sono parallele. Mantengono la loro direzione soltanto i raggi che passano attraverso il centro della lente, perché in tal caso le superfici attraversate sono localmente parallele e la lente si comporta come una lastra.

Le lenti permettono di ottenere immagini ingrandite o rimpicciolite e per questo costituiscono la parte essenziale di un gran numero di strumenti ottici, dagli occhiali ai telescopi. Queste immagini possiamo vederle proiettate su uno schermo, come quello del cinema o di un

proiettore di diapositive, dove si raccoglie la luce dei raggi che hanno attraversato la lente, e in tal caso si tratta di immagini reali; oppure le vediamo guardando *attraverso* la lente, come nel caso di una lente d'ingrandimento, e allora si tratta di immagini virtuali. Le immagini fornite dalle lenti sono prive di distorsioni soltanto quando lo spessore delle lenti è piccolo rispetto ai raggi di curvatura delle superfici che le delimitano, cioè si tratta di *lenti sottili*. E appunto di lenti sferiche sottili ci occuperemo nel seguito.

Lenti convergenti e lenti divergenti

Le lenti più spesse al centro che ai bordi sono **lenti convergenti**; quelle più spesse ai bordi che al centro sono **lenti divergenti**. Queste denominazioni risultano evidenti esaminando cosa avviene quando sulla lente incide un fascio di raggi paralleli all'asse ottico, come è mostrato nella figura 34. L'effetto è assai diverso nei due casi: i raggi rifratti dalla lente convergente convergono nel punto chiamato **fuoco** della lente, mentre nel fuoco di quella divergente convergono i prolungamenti all'indietro dei raggi rifratti. Questi ultimi si comportano infatti come se provenissero da una sorgente puntiforme.

Eseguendo l'Esperimento proposto nella figura 35 si mette in evidenza una importante differenza fra lenti convergenti e divergenti: la lente convergente può fornire una immagine reale del Sole, raccolta sul foglio di carta, mentre con la lente divergente ciò non è possibile. In generale, si trova che le lenti convergenti, come gli specchi concavi, possono fornire immagini sia reali che virtuali; mentre le lenti divergenti, come gli specchi convessi, forniscono soltanto immagini virtuali.

La grandezza più importante che caratterizza il comportamento di una lente sottile è la sua **distanza focale f** , cioè la distanza fra il centro della lente (*centro ottico*) e il suo fuoco, anzi i suoi fuochi, dato che ogni lente ne possiede due. Come avete trovato, ribaltando la lente, nell'Esperimento precedente, i due fuochi sono disposti simmetricamente rispetto al centro ottico, anche quando i raggi di curvatura delle due superfici che delimitano la lente sono diversi. Per convenzione, si attribuisce segno positivo alla distanza focale delle lenti convergenti, segno negativo a quella delle lenti divergenti.

Si usa spesso caratterizzare una lente con il suo **potere diottrico D** , che è il reciproco della distanza focale espressa in metri:

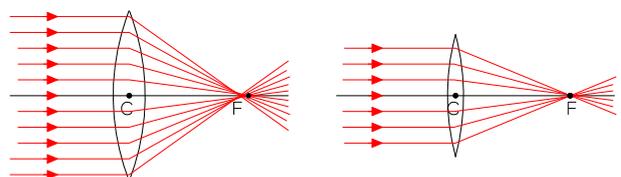
$$(10) \quad D = 1/f$$

Così si può dire che una lente convergente con lunghezza focale di 0,5 m ha un potere diottrico di 2 diottrie e che una lente divergente il cui fuoco dista 0,2 m dal suo centro ha un potere diottrico di -5 diottrie. La capacità di deviare i raggi luminosi aumenta al crescere del valore assoluto del potere diottrico delle lenti.

Che succede ponendo a contatto fra loro due lenti sottili? Esse si comporteranno come un'unica lente con potere diottrico dato dalla somma dei poteri diottrici delle due lenti.

Approfondimento 5. Le aberrazioni delle lenti.

Uno specchio concavo sferico non focalizza mai un fascio di raggi paralleli esattamente in un punto: i raggi che raggiungono il suo fuoco con buona approssimazione sono soltanto quelli vicini all'asse ottico. Un fenomeno analogo si verifica nelle lenti sferiche: i raggi che le attraversano in zone diverse vengono focalizzati in punti diversi, raggiungendo il fuoco con approssimazione tanto migliore quanto più la lente è sottile. Questo fenomeno, che prende il nome di **aberrazione sferica**, è il responsabile della distorsione nella formazione delle immagini che potete osservare voi stessi guardando un oggetto attraverso una lente d'ingrandimento in condizioni di forte ingrandimento.



Un altro difetto delle lenti, chiamato **aberrazione cromatica**, è dovuto al fatto che l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda della luce. Più precisamente, esso aumenta, seppure di poco, al diminuire della lunghezza d'onda. E quindi un raggio blu viene rifratto maggiormente di uno rosso. L'aberrazione cromatica si manifesta nelle iridescenze colorate che appaiono talvolta nelle immagini fornite dalle lenti, per esempio guardando un oggetto fortemente ingrandito attraverso una lente d'ingrandimento.

Figura A. Nelle lenti sferiche, i raggi più distanti dall'asse ottico vengono focalizzati più vicino alla lente. Tale fenomeno, detto *aberrazione sferica*, si manifesta maggiormente nella lente a sinistra che in quella a destra, più sottile (che ha gli stessi raggi di curvatura e la stessa distanza focale dell'altra). L'aberrazione sferica provoca distorsioni nella formazione delle immagini.

Figura 33. Le varie forme delle lenti convergenti (a, b, c) e di quelle divergenti (d, e, f). I loro nomi (menisco-convessa, piano-convessa, biconvessa, menisco-concava, piano-concava, biconcava) ne indicano la forma. (Adattare da Walker, Fisica, vol. 2, pag. 69)

Figura 34. Un fascio di raggi paralleli all'asse ottico incide sulla lente. (a) I raggi rifratti dalla lente convergente si avvicinano all'asse ottico, convergendo nel fuoco F della lente. (b) I raggi rifratti dalla lente divergente si allontanano dall'asse ottico: nel fuoco F della lente convergono i loro prolungamenti all'indietro. (Adattare da Caforio, La Fisica, vol. 2, pag. 143: a) la parte b) della fig. 31, b) la parte b) della fig. 32)

Figura 35. **Esperimento.** Esponete ai raggi del Sole una lente convergente (una lente d'ingrandimento) disponendo dietro di essa un foglio di carta. Sul foglio si formerà l'immagine del Sole, un cerchietto luminoso le cui dimensioni dipendono dalla distanza fra la lente e il foglio. Spostando la lente avanti e indietro, troverete una posizione per cui il cerchietto si riduce a un punto (se il Sole è intenso il foglio potrebbe infiammarsi). Rovesciando la lente, riotterrete il punto luminoso con la lente nella stessa posizione di prima. Ripetendo l'esperimento con una lente divergente (per esempio una lente da occhiali per miopi), non riuscirete a focalizzare il Sole sul foglio, comunque sposterete la lente. (Adattare da Il mondo della Fisica, vol. B, pag. 585, con una fiammella invece del fiammifero dove convergono i raggi solari)

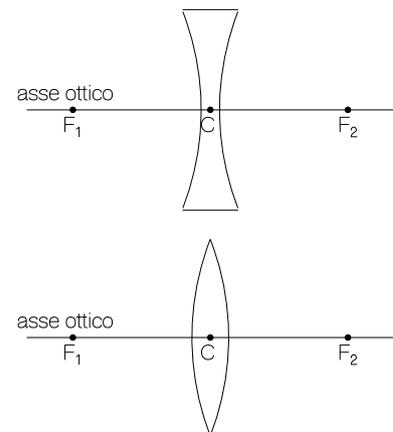
Figura 36. Centro ottico, asse ottico e fuochi di una lente convergente e di una divergente. I fuochi sono disposti simmetricamente rispetto al centro ottico, alla distanza chiamata *distanza focale* della lente.

1.11 Le immagini fornite dalle lenti

La costruzione delle immagini fornite da una lente segue criteri analoghi a quelli discussi per gli specchi nel paragrafo 7. L'immagine di un oggetto esteso si ottiene ricavando le immagini dei punti dell'oggetto, che per ciascun punto oggetto P , si ottengono individuando il corrispondente punto immagine P' dove s'incontrano due raggi rifratti provenienti da P oppure i prolungamenti all'indietro di due di essi, sapendo che se la lente non distorce l'immagine qualsiasi altro raggio proveniente da P passerà per P' (e viceversa, dato che P e P' sono punti coniugati).

Anche per le lenti la costruzione delle immagini è grandemente facilitata quando si considerano raggi incidenti che hanno direzioni particolari, per i quali è immediato individuare le direzioni dei raggi rifratti corrispondenti, cioè i *raggi principali*. Questi sono mostrati nella figura 37 per una lente convergente e per una divergente

- i raggi (rossi in figura) che incidono normalmente alla lente perché passano per il suo centro ottico C , proseguono indisturbati perché qui la lente si comporta come una lastra a facce piane e parallele;
- i raggi (blu in figura) che passano per un fuoco della lente, o che vi passano i loro prolungamenti, vengono rifratti in direzione parallela all'asse ottico;



I raggi che passano attraverso il centro ottico di una lente mantengono la loro direzione, subendo però generalmente uno spostamento. Tale effetto è trascurabile se la lente è sufficientemente sottile.

- i raggi (verdi in figura) paralleli all'asse ottico vengono rifratti nella direzione che passa per il secondo fuoco (lenti convergenti) o in quella determinata dal passaggio per il fuoco dei loro prolungamenti all'indietro (lenti divergenti).

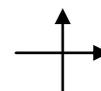
Le costruzioni rappresentate nella figura 38, eseguite con questo metodo, mostrano che le caratteristiche delle immagini di una lente convergente dipendono dalla posizione dell'oggetto rispetto alla lente. In particolare, quando l'oggetto si trova oltre il doppio della distanza focale (a), l'immagine è reale, capovolta e ingrandita; quando si trova fra il doppio della distanza focale e il fuoco (b), l'immagine è reale, capovolta e rimpicciolita; quando si trova fra il fuoco e il centro della lente, l'immagine è virtuale, diritta e ingrandita.

Il caso di una lente divergente, rappresentato in figura 39, è più semplice: qui le immagini sono sempre virtuali, diritte e rimpicciolite, dovunque sia posto l'oggetto. Ciò è in accordo col fatto che i raggi che colpiscono la lente vengono comunque rifratti in modo da divergere, sicché l'immagine è sempre definita dai prolungamenti all'indietro dei raggi rifratti e perciò è virtuale e rimpicciolita.

Che cosa s'intende per immagine capovolta? Che scambia semplicemente l'alto con il basso? Scopritelo voi stessi svolgendo l'Esperimento 1.

Esperimento 1. Che cosa s'intende per immagine capovolta?

Stabilite sperimentalmente cosa s'intenda per immagine capovolta utilizzando una lente d'ingrandimento. Disegnate su un foglio due freccette incrociate e guardatele attraverso la lente. Sollevando gradualmente la lente rispetto al foglio, vedrete l'immagine diritta delle freccette, via via più ingrandita. L'immagine apparirà capovolta quando avrete sollevato la lente a una altezza maggiore della sua distanza focale ($p > f$): vedrete allora che le freccette saranno entrambe invertite. E quindi per "immagine capovolta" si deve intendere una immagine che scambia sia l'alto con il basso sia la destra con la sinistra.



La formula dei punti coniugati per le lenti sottili.

Anche le caratteristiche delle immagini fornite dalle lenti sottili possono essere ricavate algebricamente, utilizzando una relazione, la **formula dei punti coniugati per le lenti sottili**, che è formalmente identica a quella riguardante gli specchi sferici, ma implica convenzioni un po' diverse per le grandezze in gioco, in particolare per quanto riguarda i segni:

$$(10) \quad 1/p + 1/q = 1/f$$

La formula dei punti coniugati per le lenti sottili si deve allo scienziato tedesco Karl Friedrich Gauss, che la ricavò nel 1841.

In questa formula f rappresenta la distanza focale della lente, a cui si attribuisce segno positivo per le lenti convergenti, negativo per quelle divergenti; p rappresenta la distanza dell'oggetto dal centro ottico della lente, con segno positivo per gli oggetti reali, negativo per quelli virtuali (cioè quando si tratta di immagini provenienti da altri dispositivi ottici); q rappresenta la distanza dell'immagine dal centro ottico della lente, con segno positivo quando l'immagine si forma dall'altra parte della lente rispetto all'oggetto, negativo quando si forma dalla stessa parte. Notate poi che, come nel caso degli specchi, il segno della distanza q stabilisce se l'immagine è reale ($q > 0$) oppure virtuale ($q < 0$).

L'ingrandimento lineare delle lenti è definito come per gli specchi ed è espresso dalla stessa relazione fra la distanza q dell'immagine dalla lente e quella p dell'oggetto:

$$(11) \quad I = -q/p$$

Anche qui il segno dell'ingrandimento fornisce informazioni sull'immagine: quando I ha segno positivo l'immagine è diritta, quando è negativo è capovolta.

La tabella che segue riassume le proprietà essenziali delle immagini fornite dalle lenti sottili, che si ottengono dalle formule (10) e (11).

Tabella 3. Proprietà delle immagini fornite da lenti sottili con distanza focale f.

Distanza p fra immagine e lente	Distanza q fra immagine e lente (ha segno negativo quando l'immagine si forma dalla stessa parte dell'oggetto)	Ingrandimento lineare I (ha segno negativo per le immagini capovolte)	Proprietà dell'immagine
Lenti convergenti			
$p \rightarrow \infty$	$q = f$	$I = 0$	reale, puntiforme
$p > 2f$	$f < q < 2f$	$-1 < I < 0$	reale, capovolta e rimpicciolita
$p = 2f$	$q = 2f$	$I = -1$	reale, capovolta e con dimensioni uguali a quelle dell'oggetto
$f < p < 2f$	$q > 2f$	$I < -1$	reale, capovolta e ingrandita
$p = f$	in questa condizione l'immagine non è definita		
$p < f$	$q < 0$	$I > 1$	virtuale, diritta e ingrandita
Lenti divergenti			
qualsiasi	$q < 0$	$0 < I < 1$	virtuale, diritta e rimpicciolita

Esempio 9. L'immagine fornita da una lente d'ingrandimento

Abbiamo una lente d'ingrandimento con potere diottrico di 8 diottrie. Usandola per ingrandire un oggetto che si trova a 6 cm sotto la lente, vogliamo stabilire a che distanza dalla lente si forma l'immagine e qual è l'ingrandimento.

La distanza focale della lente è il reciproco del suo potere diottrico, cioè $f = 1/8 = 0,125 \text{ m} = 12,5 \text{ cm}$. Dato che l'oggetto si trova a 6 cm dalla lente, cioè fra la lente e il fuoco, concludiamo, in accordo con la Tabella 3, che l'immagine sarà virtuale, diritta e ingrandita.

Ricaviamo dalla formula (10) la distanza dalla lente a cui si forma l'immagine: $q = 1/(1/f - 1/p) = 1/(1/0,125 - 1/0,06) = -0,0115 \text{ m} = -11,5 \text{ cm}$. Il segno negativo di q indica che l'immagine si forma dietro la lente. Otteniamo l'ingrandimento applicando la formula (11): $I = -q/p = -(-0,0115/0,06) = 1,92$. Il segno positivo di I indica che l'immagine è diritta.

Approfondimento 6. Le lenti spesse.

Nello studio delle lenti abbiamo sempre ammesso implicitamente che la deviazione dei raggi che le attraversano, cioè la rifrazione, abbia luogo nel piano normale all'asse ottico, passante per il centro ottico della lente, chiamato *piano principale* della lente. Ed è pure dal centro ottico che si misurano le distanze p e q considerate nella formula dei punti coniugati. Sebbene ciò non sia esatto, i risultati che si ottengono con questa approssimazione sono generalmente ottimi quando lo spessore delle lenti è piccolo rispetto ai raggi di curvatura delle superfici sferiche che le delimitano, cioè di tratta di *lenti sottili*. Quando invece si tratta di **lenti spesse** si dovrebbe calcolare la direzione di ciascuno dei raggi emergenti considerandone la rifrazione sulla prima superficie che essi attraversano e poi sulla seconda. Ma questo sarebbe evidentemente un compito assai gravoso, oltre che noiosissimo.

Nel caso delle lenti spesse, in alternativa al tracciamento dettagliato dei raggi, si può tuttavia ricorrere a un'altra approssimazione, che conduce in pratica a ottimi risultati. Si ammette cioè che le deviazioni dei raggi abbiano luogo quando essi attraversano due piani (*piani principali*) paralleli fra loro e normali all'asse ottico nei cosiddetti *punti principali*, le cui posizioni dipendono dalla forma della lente. Tali punti, indicati con C₁ e C₂ nella figura A, svolgono un ruolo analogo a quello del centro ottico per le lenti sottili e infatti è rispetto ad essi che si misurano le distanze p dell'oggetto e q dell'immagine e anche le distanze focali, che per le lenti spesse sono diverse dalle due parti della lente.

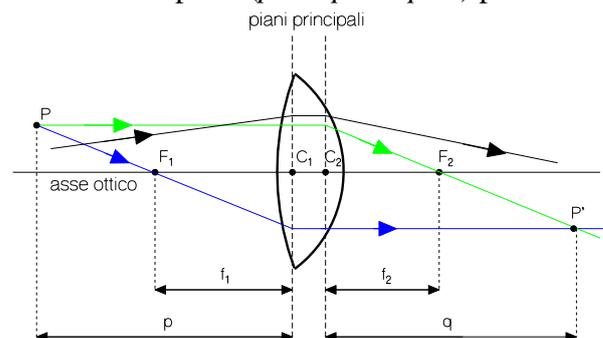


Figura A. Il raggio generico (nero) viene deviato in corrispondenza dei due piani principali, portandolo ad avvicinarsi all'asse ottico. Il raggio (verde), parallelo all'asse ottico, viene deviato verso il fuoco F₂ in corrispondenza del secondo piano principale. Il raggio (blu) che passa per il fuoco F₁ viene deviato in direzione parallela all'asse ottico. Questa costruzione prevede che il tratto fra i due piani principali venga sempre percorso parallelamente all'asse ottico.

Figura 37. I raggi principali sono di grande aiuto nella costruzione delle immagini. Nella figura sono rappresentati in rosso i raggi che passano per il centro della lente (o che vi passano i loro prolungamenti) e proseguono nella stessa direzione; in blu quelli che passano per il fuoco (o che vi passano i loro prolungamenti) e vengono rifratti parallelamente all'asse ottico; in verde quelli che incidono parallelamente all'asse ottico e vengono rifratti attraverso il fuoco.

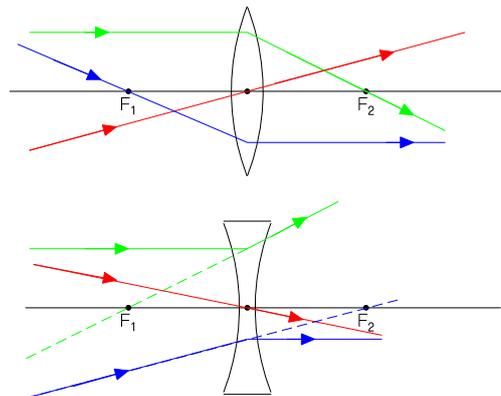


Figura 38. Costruzione delle immagini fornite da una lente convergente con il metodo dei raggi principali. Queste sono reali, capovolte e rimpicciolite quando l'oggetto si trova a una distanza maggiore del doppio della distanza focale (a); sono reali, capovolte e ingrandite, quando l'oggetto si trova fra il fuoco F e i doppio della distanza focale (b); virtuali, diritte e ingrandite, quando l'oggetto si trova fra il fuoco F e la lente (c).

(Adattare da Amaldi, La Fisica 2, pag. 310, scambiando A con B e viceversa nelle scritte e utilizzando colori che facilitino la lettura dei grafici: a) la parte a) della figura; b) la parte c); c) la parte e)

Figura 39. Costruzione delle immagini fornite da una lente divergente con il metodo dei raggi principali. Queste sono sempre virtuali, diritte e rimpicciolite, qualunque sia la posizione dell'oggetto.

(Adattare da Amaldi, La Fisica 2, pag. 314, fig. 14, scambiando A con B e viceversa nelle scritte e utilizzando colori che facilitino la lettura dei grafici)

1.12 Le misure della luce

La luce è energia, e quindi una sorgente luminosa può essere caratterizzata dalla potenza P della luce che essa irraggia, misurata in watt. Nell'Unità 2 abbiamo chiamato intensità I di un'onda il flusso della potenza da essa trasportata, cioè l'energia che nell'unità di tempo attraversa una superficie unitaria normale alla direzione di propagazione dell'onda, che dunque si misura in W/m^2 . Abbiamo anche visto che, nel caso di un'onda sferica, emessa cioè da una sorgente puntiforme che irraggia uniformemente in tutte le direzioni, questa grandezza dipende dalla distanza d dalla sorgente secondo la legge

$$(12) \quad I = P/4\pi d^2$$

E quindi la potenza che incide su una superficie di area S , avente dimensioni piccole rispetto alla distanza d e disposta normalmente ai raggi di luce, è: $IS = PS/4\pi d^2$.

Più in generale, la potenza della luce che incide su una superficie illuminata da una sorgente puntiforme dipende dall'angolo solido da essa intercettato rispetto alla sorgente.

Attenzione però: la misura della luce in termini di energia o di potenza non è pienamente significativa per l'occhio umano, perché la sua sensibilità dipende fortemente dalla lunghezza d'onda (\rightarrow Figura 1), cioè è diversa per i diversi colori della luce. Una lampada, per esempio, che emettesse luce blu ci apparirebbe assai meno luminosa di un'altra che generasse luce gialla con la stessa potenza della prima.

Per misurare adeguatamente l'intensità luminosa di una sorgente di luce in termini fisiologici, cioè in relazione alla visione umana, è stato dunque necessario introdurre una unità apposita, la **candela (cd)**, che è una delle sette unità fondamentali del Sistema Internazionale. La definizione della candela viene tuttavia ricondotta in termini fisici: tale grandezza è infatti definita come quella di una sorgente che emette $1/683$ watt/steradiante di luce alla frequenza di $5,40 \cdot 10^{14}$ Hz, che corrisponde alla lunghezza d'onda di 555 nm, cioè quella della luce giallo-verde a cui l'occhio è più sensibile. Nel caso di una sorgente con intensità luminosa di 1 candela che irraggia uniformemente in tutte le direzioni, cioè su tutto l'angolo solido (4π steradiani), la potenza emessa sarà $4\pi/683 = 18,4$ mW.

Che cos'è un **angolo solido**? Come un angolo piano definisce la porzione di piano fra due semirette uscenti da un punto vertice, così un angolo solido definisce la porzione di spazio all'interno di un cono che ha origine in un punto vertice.

La candela deve il suo nome al fatto che in origine il campione era costituito da una candela, che bruciava una data quantità di cera in un'ora.

Dalla candela derivano altre unità, fra cui il *flusso luminoso* e l'*illuminamento*. Il **flusso luminoso**, che si misura in **lumen (lm)**, rappresenta la luce totale emessa da una sorgente, corrispondendo perciò alla potenza misurata in W. Il lumen è definito come il flusso

Si chiamano **grandezze radiometriche** quelle che rappresentano l'energia o la potenza della luce; **grandezze fotometriche** quelle, come la candela, che ne rappresentano la sensazione visiva.

luminoso irradiato uniformemente nell'angolo solido di 1 steradiano da una sorgente puntiforme con intensità luminosa di 1 candela. E quindi una sorgente luminosa che irradia uniformemente in tutte le direzioni con intensità luminosa di 1 candela produce un flusso totale di 4π lumen. Per fissare le idee, una lampadina elettrica a incandescenza da 100 W (dove i 100 W rappresentano la potenza elettrica assorbita dalla lampadina, non la sua potenza luminosa che è assai inferiore → La Fisica attorno a noi 5.) emette tipicamente un flusso luminoso di 1200 lumen.

L'**illuminamento**, che si misura in **lux (lx)**, rappresenta la luce prodotta da una sorgente avente l'intensità luminosa di 1 candela su una superficie perpendicolare alla direzione dei raggi luminosi posta a 1 metro di distanza dalla sorgente, corrispondendo perciò all'intensità misurata in W/m^2 . L'illuminamento si può anche calcolare come rapporto fra il flusso luminoso che incide su una superficie e l'area di questa.

L'illuminamento prodotto dalla luce diretta del Sole è di circa 10^5 lux, che si riduce a circa 10^4 lux in luce diffusa; quello della Luna piena, attorno a 0,3 lux. Negli ambienti di casa gli impianti di illuminazione forniscono di solito illuminamenti fra 30 e 300 lux. E' assai importante che vi sia un illuminamento adeguato, almeno 200 lux, sulle scrivanie e sui tavoli da lavoro, allo scopo di evitare l'affaticamento della vista.

Esempio 10. Illuminiamo il quaderno.

Vogliamo illuminare un quaderno che si trova su un tavolo usando una lampada a incandescenza da 60 W (→ Tabella 4) posta sulla sua verticale. Qual è l'altezza rispetto al quaderno a cui la lampada va posta? Qual è l'illuminamento su un altro quaderno, che sta sul tavolo a 1 metro dal primo?

Una lampada da 60 W emette un flusso luminoso totale Φ_L di circa 730 lumen, che supponiamo distribuito uniformemente in tutte le direzioni. A una distanza d dalla lampada l'illuminamento I_L è: $I_L = \Phi_L / 4\pi d^2$. Si ricava pertanto, imponendo che l'illuminamento sia $I_L = 200$ lux: $d = \sqrt{(\Phi_L / 4\pi I_L)} = \sqrt{(730 / (4 \times 3,14 \times 200))} = 0,54$ m. L'altro quaderno, a 1 metro dal primo in orizzontale, si trova alla distanza $d' = \sqrt{(1 + 0,54^2)} = 1,14$ m dalla lampada e pertanto l'illuminamento su di esso sarà: $I_L' = \Phi_L / 4\pi d'^2 = 730 / (4 \times 3,14 \times 1,14^2) = 44,7$ lux.

Ma quest'ultimo calcolo è sbagliato per difetto: trovate voi stessi dove sta l'errore.

Esempio 11. Valutiamo il flusso luminoso del Sole.

Possiamo valutare il flusso luminoso Φ_L del Sole sapendo che l'illuminamento I_L su una superficie normale al Sole è circa $1,3 \cdot 10^5$ lux. Dato che la distanza fra il Sole e la Terra è mediamente circa 150 milioni di km, abbiamo: $\Phi_L = I_L 4\pi d^2 = 1,3 \cdot 10^5 \times 4 \times 3,14 \times (1,5 \cdot 10^{11})^2 = 3,7 \cdot 10^{28}$ lumen.

La Fisica attorno a noi 4. Lampadine o stufette?

Le lampadine usate più comunemente per l'illuminazione degli interni - case, scuole, uffici, ... - sono quelle a *incandescenza*, che sfruttano l'emissione di luce per effetto termico da parte di un filamento di tungsteno riscaldato dal passaggio di una corrente elettrica. Queste lampadine sono usualmente caratterizzate dalla potenza elettrica, misurata in watt, che esse assorbono durante il loro funzionamento. Ma più che di lampadine si dovrebbe parlare di "stufette elettriche", dato che ben oltre il 90% della potenza elettrica viene dissipata nella forma di calore. Il rendimento energetico di queste lampadine, cioè il rapporto fra la potenza luminosa irradiata e quella elettrica assorbita è assai basso: fra 4 e 8%. In realtà più che il rendimento energetico interessa il *rendimento luminoso*, cioè il rapporto fra il flusso luminoso generato in lumen e la potenza elettrica assorbita in watt. Prestazioni un po' migliori si ottengono con le *lampade ad alogeni*, chiamate così perché il

bromo contenuto nel loro bulbo rallenta il processo di assottigliamento del filamento per sublimazione, che limita la vita delle lampade a incandescenza. Decisamente migliori sono invece le prestazioni delle *lampade fluorescenti* (→ Tomo IV, pag. xxx), sia del tipo tubolare che del tipo compatto, intercambiabile con le lampadine usuali. Alcune di queste però producono una luce che risulta sgradevole, perché diversa sia da quella del Sole che delle lampade a cui siamo abituati.

La Tabella 4 riporta anche i dati relativi alle lampade al sodio ad alta pressione, impiegate per l'illuminazione delle strade, che offrono i rendimenti più alti, e alle lampade a stato solido introdotte di recente, che sono chiamate LED, dall'inglese *light emitting diode*, che significa diodo emettitore di luce (→ Tomo V, pag. xxx).

Tabella 4. Caratteristiche di alcuni tipi di lampade elettriche.			
	Potenza elettrica (watt)	flusso luminoso (lumen)	Rapporto flusso/potenza (lumen/watt)
lampadine a incandescenza di tipo comune	25	230	9,2
	60	730	12,2
	100	1300	13
lampade ad alogeni	100	1600	16
lampade fluorescenti tubolari	32	3200	100
lampade fluorescenti compatte	20	1200	60
lampade al sodio			
LED (bianco)	1,16	80	70

Figura 40. Man mano che ci si allontana dalla sorgente, il flusso di potenza diminuisce perché l'energia si distribuisce su superfici sempre più grandi, la cui area cresce proporzionalmente al quadrato della distanza.
(adattare da Caforio, Fisica 2, pag. 95)

Figura 41. Un angolo solido Ω individua una "apertura" nello spazio rispetto a un punto O, che possiamo visualizzare come un cono con vertice in O. Per una porzione di area ΔS della superficie sferica di raggio r con centro in O, l'angolo solido è $\Delta\Omega = \Delta S/r^2$. L'angolo solido è un numero puro che si misura in steradiani (sr).
(adattare da Caforio, Fisica 2, pag. 94,

12) Quando le scarpe sono state ben lustrate sulla loro superficie diventa apprezzabile
O la riflessione diffusa O la rifrazione O la riflessione speculare

13) La riflessione diffusa differisce da quella speculare perché
O in tal caso le leggi della riflessione non sono più valide
O in tal caso interviene il fenomeno della rifrazione
O la superficie scabra riflette in direzioni diverse i raggi paralleli di un fascio di luce

14) La luce proveniente dal Sole che illumina gli ambienti è
O sempre O quasi sempre O quasi mai
luce diffusa.

15) Un fascetto di luce colpisce uno specchio con angolo d'incidenza di 33° . L'angolo fra le direzioni del fascetto incidente e di quello riflesso è:
O 66° O 33° O 0°

16) Vero o falso?	V	F
Gli specchi piani forniscono immagini ingrandite	O	<u>O</u>
Gli specchi piani forniscono immagini virtuali	<u>O</u>	O
Gli specchi piani forniscono immagini capovolte	O	<u>O</u>
Gli specchi piani forniscono immagini distorte	O	<u>O</u>
Le immagini degli specchi piani si formano "dentro" gli specchi	<u>O</u>	O

17) Le immagini virtuali si chiamano così perché
O non sono visibili O non si possono raccogliere su uno schermo O sono capovolte

18) Una persona afferma di vedere chiaramente gli oggetti solo quando si trovano a circa 30 cm dai suoi occhi. Per vedere bene il suo viso riflesso in uno specchio piano, essa deve quindi disporre lo specchio alla distanza di
O 60 cm O 30 cm O 15 cm

19) Sottolineate gli errori che individuate nelle frasi seguenti.
Gli specchi sferici possono essere concavi o convessi. Un fascio di raggi paralleli all'asse ottico di uno specchio **convesso** converge nel fuoco; questa convergenza è garantita esattamente solo nel caso di uno specchio di forma **iperbolica**. Gli specchi convessi forniscono sempre immagini virtuali, diritte e **rimpicciolite**.

20) Un microspecchio non funziona, a causa della diffrazione, quando ha dimensioni di circa
O 100 nm O 10 μm O 1 mm

21) La costruzione delle immagini fornite da uno specchio sferico concavo è molto facilitata quando si considerano i raggi principali: per esempio, il raggio che dal punto oggetto si dirige verso il centro ottico della lente, il quale
O viene deflesso in modo da passare per il fuoco
O viene riflesso nella stessa direzione da cui proviene
O prosegue indisturbato il suo cammino

22) Quando la posizione q dell'immagine di uno specchio sferico, calcolata con la formula dei punti coniugati, ha segno negativo vuol dire che l'immagine
O si forma al di là dello specchio O è capovolta O è reale

- Una lente convergente non può mai fornire immagini diritte O Q
- 36) Esponendo al Sole una lente disposta al di sopra di un foglio di carta, sul foglio si può ottenere una immagine del Sole quando la lente
Q è convergente O è divergente O si comporta come una lente sottile
- 37) I raggi che passano attraverso il centro ottico di una lente sottile
O vengono deviati Q subiscono uno spostamento trascurabile O vengono deviati e spostati
- 38) Il potere diottrico di una lente di vetro
Q dipende sempre O dipende a volte O non dipende
dal mezzo in cui si trova la lente
- 39) I raggi che passano per un fuoco di una lente, o che vi passano i loro prolungamenti,
Q vengono rifratti in direzione parallela all'asse ottico
O passano indisturbati
O vengono rifratti nella direzione del centro ottico
- 40) Una lente divergente non può mai fornire immagini
O diritte e rimpicciolite Q reali e ingrandite O virtuali e rimpicciolite
- 41) La distanza focale di una lente da 5 diottrie è
O 5 cm O 5 m Q 20 cm
- 42) Un grillo che si trova a 50 cm da una lente convergente da 5 diottrie, sull'asse ottico, fa un salto allontanandosi di 50 cm dalla lente. La sua immagine si sposta
O da 25 cm a 33,3 cm Q da 33,3 a 25 cm O da 1 m a 50 cm
rispetto alla lente.
- 43) Per misurare la luce tenendo conto della diversa sensibilità dell'occhio ai diversi colori, nel Sistema Internazionale è stata introdotta una apposita unità fondamentale chiamata
Q candela O lumen O lux
- 44) Tenendo conto della diversa sensibilità dell'occhio ai diversi colori, il flusso luminoso, cioè la luce totale emessa da una sorgente, si misura in
O lux O watt Q lumen
- 45) L'illuminamento prodotto dalla luce diretta del Sole è circa
O dieci Q cento O mille
volte maggiore di quello che l'illuminazione artificiale produce normalmente in casa.
- 46) Indicate quale delle seguenti lampade, che emettono rispettivamente
O 1 watt nel rosso Q 1 watt nel giallo O 2 watt nel blu
produce il flusso luminoso maggiore, misurato in lumen.
- 47) Su una superficie di area 100 cm^2 incide un flusso luminoso di 10 lumen. L'illuminamento sulla superficie è:
O 0,1 lux Q 1000 lux O 10 lux
- 48) Vero o falso? V F
Il colore bianco della luce solare è quello a cui l'occhio umano è più sensibile O Q
Per specificare la luce emessa da una lampadina basta darle la potenza in watt O Q
Il flusso luminoso e l'illuminamento sono grandezze derivate dalla candela Q O
L'intensità luminosa di una sorgente, misurata in candele, diminuisce con la distanza O Q

Problemi e quesiti

1. L'intensità di un'onda luminosa piana si riduce da $0,1 \text{ W/m}^2$ a $0,05 \text{ W/m}^2$ quando essa attraversa uno spessore di 5 cm di plastica trasparente. Calcolate il coefficiente di assorbimento del materiale e l'intensità dell'onda dopo il passaggio attraverso un blocco di plastica dello spessore di 20 cm.

Risoluzione. Dalla formula (1) si ricava il coefficiente di assorbimento del materiale: $\alpha = -(1/x) \ln(I(x)/I(0)) = -\ln(0,05/0,1)/0,05 = 13,9 \text{ m}^{-1}$. L'intensità dell'onda dopo il passaggio nel blocco di plastica, ponendo $x = 0,2 \text{ m}$ nella formula (1), è: $I(x) = I(0) e^{-\alpha x} = 0,1 \times e^{-13,9 \times 0,2} = 0,0062 \text{ W/m}^2$.

2. Spiegate perché, secondo voi, nella luce sott'acqua prevalgono i colori di tonalità verde-azzurra, ricordando che il coefficiente di trasmissione spesso dipende dalla lunghezza d'onda della luce.

Risoluzione. Perché sott'acqua prevalga il verde azzurro vuol dire che alla luce bianca solare viene sottratta quella di tonalità rosso-gialla. Si può dunque ammettere che il coefficiente di assorbimento della luce nell'acqua sia maggiore per le lunghezze d'onda più lunghe che per le altre.

3. Utilizzate il grafico in figura 4 per stabilire lo spessore che deve avere un blocco di vetro per risultare opaco alla luce, cioè, per esempio, perché atteni la luce di un fattore 10^6 .

Risoluzione. Esaminando il grafico in figura si osserva che l'attenuazione della luce non dipende dalla lunghezza d'onda in un vasto intervallo e che vale approssimativamente 0,98 per uno spessore di 5 mm. Con questo dato dalla formula (1) si ricava il coefficiente di assorbimento del vetro: $\alpha = -(1/x) \ln(I(x)/I(0)) = -(1/0,005) \ln(0,98) = 4,04 \text{ m}^{-1}$. Lo spessore L del blocco che attenua la luce del fattore 10^6 è: $L = -\ln(I(L)/I(0))/\alpha = -\ln(10^{-6})/4,04 = 3,42 \text{ m}$.

4. Uno schermo quadrato di lato $L = 8 \text{ cm}$ è posto a 10 metri da una sorgente luminosa che emette uniformemente in tutte le direzioni la potenza di 0,4 W, e a 5 metri, nella stessa direzione, da una parete bianca. Calcolate l'area dell'ombra che si forma sulla parete e la potenza della luce che non la raggiunge.

Risoluzione. L'ombra sullo schermo è un quadrato con lato L' proporzionale al rapporto fra la distanza della parete dalla sorgente e quella dalla sorgente allo schermo: $L' = L(15/10) = 0,08 \times 1,5 = 0,12 \text{ m}$. L'area dello schermo è $S = 0,08^2 = 0,0064 \text{ m}^2$. La potenza della luce che non raggiunge l'ombra è quella intercettata dall'ostacolo. A distanza $d = 10 \text{ m}$ dalla sorgente il flusso di potenza, cioè la potenza per unità di superficie disposta normalmente ai raggi luminosi, è $P/(4\pi d^2) = 0,4/4 \times 3,14 \times 10^2 = 3,18 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$. Quindi la potenza intercettata dall'ostacolo è: $S \times 3,18 \cdot 10^{-4} = 2,04 \cdot 10^{-6} \text{ W}$.

5. Un bambino alto 90 cm si trova all'esterno di una camera oscura a 4,5 metri dal foro. Calcolate l'altezza della sua immagine che appare sulla parete interna della camera oscura, sapendo che questa parete dista 1,5 metri dal foro.

Risoluzione. Tracciando un grafico simile a quello in figura 10, si conclude che l'altezza L' dell'immagine è pari a quella L del bambino nel rapporto fra la distanza dal foro della parete e quella del bambino: $L' = 0,9 \times 1,5/4,5 = 0,3 \text{ m}$.

6. Guardando attraverso una finestrella alta 60 cm, vediamo un albero la cui immagine rientra esattamente nell'apertura. Calcolate l'altezza dell'albero se noi ci troviamo a 1 m dalla finestrella, l'albero a 19 metri da essa.

Risoluzione. L'altezza A dell'albero è pari all'altezza della finestrella moltiplicata per il rapporto fra la distanza dell'albero dai nostri occhi e quella della finestrella: $A = 0,6 \times 20/1 = 12 \text{ m}$.

7. Un fascio luminoso impulsivo colpisce normalmente una lastrina di vetro con spessore $d = 5 \text{ mm}$ e indice di rifrazione $n = 1,5$, nella quale vi è un foro. Calcolate il ritardo dei raggi che hanno attraversato la lastrina rispetto a quelli che sono passati per il foro, e la distanza fra i fronti d'onda dei due impulsi in unità di lunghezza d'onda sapendo che si tratta di luce verde con $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Risoluzione. I raggi che passano attraverso la lastrina impiegano per attraversarla il tempo $t = d/(c/n) = 0,005 \times 1,5/3 \cdot 10^8 = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ s}$. Quelli che passano attraverso il foro impiegano il tempo $t' = d/c = 0,005/3 \cdot 10^8 = 1,667 \cdot 10^{-11} \text{ s}$. Il ritardo dei primi rispetto ai secondi è: $\Delta t = t' - t = 2,5 \cdot 10^{-11} - 1,667 \cdot 10^{-11} = 8,33 \cdot 10^{-12} \text{ s}$. A questo ritardo nell'aria corrisponde la distanza $c\Delta t = 3 \cdot 10^8 \times 8,33 \cdot 10^{-12} = 0,0025 \text{ m}$ fra i fronti d'onda dei due impulsi, cioè un numero di lunghezze d'onda pari a $0,0025/5 \cdot 10^{-7} = 5000$.

8. Su un vecchio libro troviamo scritto che i corpi sono tanto più rifrangenti quanto maggiore è la loro densità. Stabilite se questa asserzione è corretta confrontando indici di rifrazione e densità di acqua, petrolio ($0,79 \text{ g/cm}^3$), ghiaccio ($0,92 \text{ g/cm}^3$), plexiglas ($1,2 \text{ g/cm}^3$), vetro ($2,5 \text{ g/cm}^3$), diamante ($3,52 \text{ g/cm}^3$).

materiale	densità (g/cm^3)	indice di rifrazione
petrolio	0,79	1,45
ghiaccio	0,92	1,31
acqua	1	1,33
plexiglas	1,2	1,49
vetro	2,5	1,50
diamante	3,52	2,42

Risoluzione. Raccogliamo i dati in una tabella, ordinando i materiali per valori crescenti della densità e utilizzando i dati della Tabella 1. Si trova così che l'asserzione non è corretta. Essa risulta invece verificata per i materiali solidi, che si dovrebbero esaminare in maggior numero per poterla eventualmente confutare. Ma anche per i solidi non sembra che vi sia alcun tipo di proporzionalità fra densità e indice di rifrazione.

9. Un impulso di luce blu e uno di luce rossa vengono sparati contemporaneamente contro una lastra di vetro. Quale di essi emerge per primo dalla lastra?

Risoluzione: Dato che l'indice di rifrazione aumenta generalmente al diminuire della lunghezza d'onda, l'impulso di luce rossa, più veloce dell'altro, emergerà per primo dalla lastra.

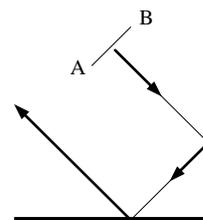
10. Vogliamo realizzare un oggetto che sia invisibile. Date qualche suggerimento su come procedere.

Risoluzione. Perché un oggetto sia invisibile, occorre che esso sia perfettamente trasparente e che sulla sua superficie la luce non subisca riflessione. Più precisamente, per potere vedere attraverso di esso, occorre che i raggi di luce che lo attraversano non subiscano alcuna deviazione, cioè l'angolo di rifrazione sia sempre uguale a quello d'incidenza. Ciò si ottiene se il materiale di cui è fatto questo corpo ha indice di rifrazione esattamente uguale a quello dell'aria che lo circonda. Resta solo da trovare il materiale con questa proprietà.

11. Due raggi provenienti da una lampadina colpiscono uno specchio piano con angoli d'incidenza rispettivamente di 25° e 35° . Calcolate l'angolo fra i due raggi riflessi.

Risoluzione. Il problema si risolve utilizzando la seconda legge della riflessione, per cui gli angoli di riflessione dei due raggi sono rispettivamente 25° e 35° . Sicché l'angolo fra essi è 10° , esattamente come fra i raggi incidenti.

12. L'oggetto esteso AB viene osservato dopo la riflessione attraverso i due specchi in figura, disposti a 90° fra loro. Stabilite se l'immagine appare diritta o capovolta a un osservatore che da sinistra guarda verso lo specchio in basso.



Risoluzione. L'immagine appare capovolta. Ciò si dimostra tracciando i raggi uscenti dagli estremi A e B dell'oggetto, paralleli a quello in figura.

13. Uno specchio di vetro riflette le immagini. Come è possibile, se il vetro è un materiale trasparente? Per rispondere al quesito esaminate un frammento di uno specchio rotto.

Risoluzione. Esaminando il frammento di specchio osserverete che sulla superficie posteriore del vetro si trova uno straterello di metallo. E' a questo strato, non al vetro, che è affidata la riflessione negli specchi di uso comune usuali (→ Collegamento con la storia 1).

14. Disponiamo uno specchio su una parete di una stanza, che è illuminata da una lampadina. Secondo voi, l'illuminazione complessiva della stanza aumenta, diminuisce o resta uguale? Spiegate il vostro ragionamento.

Risoluzione. Una applicazione frettolosa del principio di conservazione dell'energia potrebbe condurre a stabilire che l'illuminazione complessiva resta uguale, dato che resta invariata l'energia emessa dalla sorgente. Ma il ragionamento non è corretto, perché siamo in presenza di fenomeni dissipativi: l'assorbimento della luce da parte delle pareti e degli oggetti presenti nella stanza. In effetti l'unico cambiamento è la sostituzione di una parete con uno specchio. Entrambi ricevono luce dalla lampadina; lo specchio la riflette quasi totalmente, mentre la parete la diffonde, ma in parte l'assorbe. L'illuminazione con luce diretta aumenta dunque più di quanto diminuisca l'illuminazione con luce diffusa. E quindi si può concludere che l'illuminazione complessiva della stanza aumenta.

15. Una persona che si trova in una stanza buia vede, attraverso una piccola apertura, un'altra persona che si trova all'esterno. Ma la persona che si trova all'esterno, guardando attraverso l'apertura, non riesce a vedere la persona all'interno. Ciò contraddice o no il principio di invertibilità dei percorsi ottici?

Risoluzione. Il motivo per cui la persona all'esterno non vede nulla attraverso l'apertura è che la stanza è buia, più precisamente è assai debolmente illuminata dalla luce che filtra attraverso l'apertura. Pertanto la luce diffusa dalla persona al suo interno è insufficiente a rendere visibili i raggi che da essa raggiungono gli occhi della persona che si trova fuori. E quindi il principio d'invertibilità dei percorsi ottici resta valido.

16. Il Sole al tramonto viene riflesso sul mare formando un sorta di striscia luminosa. Spiegate perché e stabilite la forma che avrebbe questa immagine se il mare fosse perfettamente calmo, cioè la sua superficie perfettamente piana.

Risoluzione. La striscia luminosa è dovuta alla riflessione della luce del Sole da parte delle cime delle onde, di varia altezza lungo la striscia. Se la superficie del mare fosse perfettamente piana, si vedrebbe semplicemente l'immagine del Sole riflessa come in uno specchio.

17. Una freccia luminosa si trova sull'asse ottico di uno specchio concavo di raggio $r = 80$ cm a distanza $p = 60$ cm dal vertice dello specchio. Determinate le caratteristiche dell'immagine incluso l'ingrandimento.

Risoluzione. La distanza focale dello specchio è $f = r/2 = 0,8/2 = 0,4$ m. La posizione dell'immagine si ricava dalla formula dei punti coniugati: $q = 1/(1/f - 1/p) = 1/(1/0,4 - 1/0,6) = 1,2$ m, dove il segno positivo indica che l'immagine è reale e si forma dalla stessa parte dello specchio rispetto all'oggetto. L'ingrandimento si ricava dalla formula (8): $I = -q/p = -1,2/0,6 = -2$, dove il segno negativo indica che l'immagine è capovolta.

18. Dimostrate che l'ingrandimento di uno specchio sferico può essere espresso in funzione della posizione p dell'oggetto e della distanza focale f nella forma seguente: $I = f/(f-p)$. Utilizzate poi questa espressione per stabilire le condizioni per cui l'immagine è diritta o rovesciata per uno specchio concavo e per uno convesso.

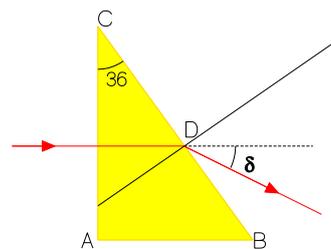
Risoluzione. La grandezza che non figura nell'espressione data nell'enunciato del problema è la posizione q dell'immagine. Questa si ricava dalla formula dei punti coniugati (4): $q = 1/(1/f - 1/p)$. Sostituendo q nell'espressione dell'ingrandimento (formula (5)) e poi semplificando si ottiene quanto si voleva dimostrare. L'immagine è diritta quando l'ingrandimento I ha segno positivo, capovolta quando il segno è negativo. Nel caso di uno specchio concavo la distanza focale f ha segno positivo e quindi l'immagine è diritta quando $f-p > 0$, cioè $p < f$; capovolta quando $p > f$. Nel caso di uno specchio convesso la distanza focale f ha segno negativo e quindi l'immagine è sempre diritta perché i due termini al denominatore dell'espressione data nell'enunciato hanno entrambi segno negativo, e negativo è anche il numeratore, sicché il segno dell'ingrandimento è sempre positivo.

19. Vogliamo usare come retrovisore di un'auto uno specchietto sferico lungo 15 cm in modo da avere un campo di vista orizzontale di 8 metri a 20 m di distanza. Calcolate il raggio di curvatura dello specchio.

Risoluzione. Lo specchietto deve rimpicciolire il campo di vista portandolo entro la sua lunghezza, cioè deve avere un ingrandimento $I = 0,15/20 = 0,0075$. Dato che l'oggetto si trova a $p = 20$ m dallo specchio, dalla formula (5) ricaviamo la distanza dell'immagine: $q = -Ip = -0,0075 \times 20 = -0,15$ m, dove il segno negativo indica che si tratta di un'immagine virtuale. Ricaviamo la distanza focale dello specchio dalla formula (4): $f = 1/(1/p + 1/q) = 1/(1/20 - 1/0,15) = -0,151$ m, dove il segno negativo indica che lo specchietto deve essere convesso. Il raggio di curvatura dello specchietto deve essere $r = 2f = 0,302$ m.

20. Calcolate l'angolo di deviazione δ che subisce il raggio di luce in figura, che incide normalmente sulla faccia AC del prisma di vetro ($n = 1,5$).

Risoluzione. Il raggio, incidendo normalmente, prosegue nella sua direzione fino a raggiungere il punto D, con angolo d'incidenza $i = 36^\circ$ rispetto alla normale in D. L'angolo di rifrazione si ricava dalla legge di Snell-Cartesio assumendo unitario l'indice di rifrazione n_2 dell'aria e indicando con n_1 quello del vetro: $r = \arcsen((n_1/n_2) \sin i) = \arcsen(1,5 \sin(36^\circ)) = 61,8^\circ$. L'angolo di deviazione si ottiene infine dalla differenza fra r e i : $\delta = 61,8 - 36 = 25,8^\circ$.



21. Un fascio di luce colpisce la superficie di separazione aria-liquido con angolo d'incidenza di 60° . Si osserva che l'angolo di rifrazione è 36° . Calcolate l'indice di rifrazione del liquido assumendo unitario quello dell'aria.

Risoluzione. Ricaviamo l'indice di rifrazione n_2 del liquido dalla legge di Snell-Cartesio, ponendo $n_1 = 1$: $n_2 = n_1 \sin i / \sin r = 0,866/0,588 = 1,47$. Che è l'indice di rifrazione della glicerina.

22. Disegnate lo schema di un periscopio, simile a quello rappresentato nella figura 32, nel quale si impiegano due specchi piani al posto dei prismi. Stabilite l'inclinazione degli specchi perché il cammino ottico resti invariato.

Risoluzione. I due specchi vanno disposti nelle posizioni delle facce ipotenusa dei due prismi in figura, quindi con inclinazione di 45° rispetto all'orizzontale.

23. Eseguendo misure sul passaggio della luce dall'aria a un materiale trasparente si trova che quando l'angolo di incidenza è $i = 45^\circ$ l'angolo di rifrazione è $r = 24,6^\circ$. Calcolate l'indice di rifrazione del materiale.

Risoluzione. L'indice di rifrazione n_2 del mezzo si ricava dalla legge di Snell-Cartesio ponendo per l'aria $n_1 = 1$:
 $n_2 = n_1 (\sin i / \sin r) = \sin 45^\circ / \sin 24,6^\circ = 1,70$.

24. Immergendo nell'acqua un cilindretto di vetro questo resta visibile, mentre quasi scompare immergendolo in un particolare altro liquido. Trovate una spiegazione per questa osservazione.

Risoluzione. Una condizione perché il cilindretto risulti invisibile è che esso sia trasparente, un'altra è che i raggi che lo attraversano, raggiungendo i nostri occhi, non subiscano deviazione. Ciò è verificato quando l'indice di rifrazione del vetro del cilindretto è uguale a quello del liquido in cui è immerso. E questo è evidentemente il caso.

25. Leggete l'Approfondimento 4. e stabilite qualitativamente il percorso che seguirebbe il bagnino se fosse una foca.

Risoluzione. Dato che la foca è assai più veloce nell'acqua che sulla terra, essa abbrevierebbe il percorso sulla spiaggia allungando quello nel mare.

26. Un pesce che nuota nell'acqua del mare, guardando verso l'alto, vede un cerchio luminoso. Spiegate perché e stabilite l'angolo di apertura del cono, con vertice nel pesce, che interseca la superficie dell'acqua nel cerchio anzidetto.

(vignetta da fare come in Hewitt pag. 502, sostituendo la scritta 96° con β)

Risoluzione. L'osservazione del pesce è dovuta al fenomeno della rifrazione dei raggi luminosi che dall'aria penetrano nell'acqua. I raggi provenienti dall'aria che possono raggiungere i suoi occhi sono infatti soltanto quelli che cadono nel cerchio in figura. All'esterno di questo cerchio si verifica la riflessione totale dei raggi provenienti dall'acqua, con angolo limite dato dalla formula (7). Ponendo $n_1 = 1,333$ per l'acqua e $n_2 = 1$ per l'aria, sia ha: $\alpha_L = \arcsen(n_2/n_1) = \arcsen(1/1,333) = 48,6^\circ$. E quindi l'angolo di apertura del cono in figura è $2 \times 48,6 = 97,2^\circ$.

27. Per focalizzare su uno schermo la luce di una stella usando una lente sferica sottile, si trova che essa va posta a 2 m dallo schermo. La stessa lente viene posta a 5 m da una lampadina, che assumiamo come sorgente puntiforme. Calcolate la distanza dalla lente a cui va posto lo schermo per focalizzarvi la luce della lampadina.

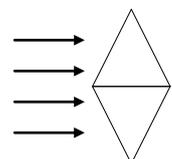
Risoluzione. La lente focalizza la luce della stella e quindi è convergente. La sua distanza focale è $f = 2$ m, perché i raggi della stella, che costituisce una sorgente all'infinito, convergono nel fuoco. Quando la lente viene illuminata dalla lampadina, a distanza $p = 5$ m dalla lente, la distanza q dalla lente, dove si forma l'immagine e dove quindi va posto lo schermo, si ottiene dalla formula dei punti coniugati: $q = 1/(1/f - 1/p) = 1/(1/2 - 1/5) = 3,33$ m.

28. Stabilite qualitativamente come si modifica la distanza focale di una lente convergente quando viene immersa nell'acqua.

Risoluzione. L'indice di rifrazione del vetro è 1,5, quello dell'acqua 1,33 (\rightarrow Tabella 1), quello dell'aria 1. Si capisce che gli effetti della rifrazione sono meno vistosi per una lente di vetro in aria che per la stessa lente in acqua. E quindi la convergenza sarà più debole per la lente in acqua, la sua lunghezza focale maggiore.

29. Perché quando un fascio di raggi parallelo all'asse ottico colpisce una lente convergente i raggi rifratti tendono ad avvicinarsi all'asse? Spiegate qualitativamente assumendo che la lente sia costituita da due prismi sovrapposti come in figura.

Risoluzione. I raggi che colpiscono il prisma in alto vengono deflessi verso il basso. Quelli che colpiscono il prisma in basso vengono deflessi verso l'alto. Cioè tutti tendono ad avvicinarsi all'asse ottico.



30. Poniamo a contatto due lenti convergenti sottili con lunghezza focale rispettivamente di 0,2 m e 0,5 m. Calcolate la lunghezza focale della "lente equivalente" così ottenuta.

Risoluzione. Il potere diottrico dell'insieme delle due lenti è la somma dei poteri diottrici delle due lenti. Si ha pertanto: $D = D_1 + D_2 = 1/0,2 + 1/0,5 = 7$ diottrie. La distanza focale corrispondente è $f = 1/D = 1/7 = 0,143$ m.

31. Escogitate un modo semplice per determinare il potere diottrico di una lente divergente, in modo simile a quello che usereste per una lente convergente.

Risoluzione. Ponete la lente divergente di potere diottrico D_x a contatto con una lente convergente con potere diottrico noto D , scelta in modo che l'insieme si comporti come una lente convergente, cioè D sia sicuramente maggiore del valore assoluto di D_x . Misurate la distanza focale f' dell'insieme, che avrà quindi potere diottrico $D' = 1/f'$. Sapendo che $D' = D + D_x$, ricaverete $D_x = D - D' = D - 1/f'$.

32. Una lente convergente, posta a 90 cm da un oggetto, ne forma un'immagine reale e rimpicciolita, che si trova a 72 cm dalla lente. Calcolate il potere diottrico della lente e l'ingrandimento dell'immagine.

Risoluzione. Dato che l'immagine è reale si tratta di una lente convergente. Calcoliamo la distanza focale della lente, conoscendo $p = 0,9$ m e $q = 0,72$ m, con la formula dei punti coniugati: $f = 1/(1/p + 1/q) = 1/(1/0,9 + 1/0,72) = 0,4$ m. E quindi il potere diottrico della lente è: $D = 1/f = 1/0,4 = 2,5$ diottrie. L'ingrandimento dell'immagine si ottiene dalla formula (11): $I = -q/p = -0,72/0,9 = -0,8$. Il segno negativo indica che l'immagine è capovolta.

33. L'oblò della cabina di una nave viene realizzato per errore con un blocco di vetro avente una superficie piana e l'altra sferica concava, sicché si comporta come una lente divergente con lunghezza focale $f = -40$ m. Come appare l'esterno visto dalla cabina? A che distanza appare trovarsi un battello che dista 200 m dalla nave?

Risoluzione. Trattandosi di una lente divergente, l'oblò fornisce immagini virtuali, diritte e rimpicciolite. La distanza q a cui appare trovarsi il battello che si trova a distanza $p = 200$ m dalla nave si ricava dalla formula dei punti coniugati: $q = 1/(1/f - 1/p) = 1/(1/(-40) - 1/200) = -33,3$ m, dove il segno negativo indica che si tratta di un'immagine virtuale.

34. Una rana che si trova a 30 cm da una lente divergente con distanza focale $f = -50$ cm, sull'asse ottico della lente, se ne allontana con un salto di 80 cm. Determinate le caratteristiche dell'immagine prima e dopo il salto, e lo spostamento della posizione dell'immagine.

Risoluzione. La distanza dell'immagine dalla lente si ricava dalla formula dei punti coniugati: $q = 1/(1/f - 1/p)$. Prima del salto, essendo $p_1 = 0,3$ m, l'immagine della rana si forma alla distanza $q_1 = 1/(1/(-0,5) - 1/0,3) = -0,188$ m, dove il segno negativo indica che si tratta di una immagine virtuale. L'ingrandimento dell'immagine è $I_1 = -q_1/p_1 = 0,188/0,3 = 0,627$, dove il segno positivo indica che l'immagine è diritta. Dopo il salto, la rana si porta a distanza $p_2 = 1,3$ m dalla lente, e quindi l'immagine si forma alla distanza $q_2 = 1/(1/(-0,5) - 1/1,3) = -0,361$ m, con ingrandimento $I_2 = -q_2/p_2 = 0,361/1,3 = 0,278$. Lo spostamento della posizione dell'immagine nella direzione della lente è: $-0,361 - (-0,188) = -0,173$ m, cioè l'immagine si avvicina alla lente.

35. La distanza focale di una lente sottile biconvessa delimitata da due superfici sferiche di raggi r_1 ed r_2 è data dalla formula: $1/f = (n-1)(1/r_1 + 1/r_2)$, dove n è l'indice di rifrazione del vetro avendo assunto unitario quello dell'aria. Calcolate il raggio di curvatura r di una lente da 10 diottrie con $r_1 = r_2 = r$. Sapreste specializzare la formula precedente al caso di una lente piano-convessa?

Risoluzione. Una lente da 10 diottrie ha lunghezza focale $f = 1/D = 0,1$ m. Nel caso in cui si ha $r_1 = r_2 = r$ la formula data nell'enunciato del problema si semplifica nella forma: $1/f = 2(n-1)/r$. Da questa si ricava il raggio di curvatura $r = 2f(n-1) = 2 \times 0,1 \times (1,5 - 1) = 0,1$ m, avendo assunto $n = 1,5$ l'indice di rifrazione del vetro (\rightarrow Tabella 1).

Una lente piano-convessa è delimitata da una superficie sferica di raggio r e da un piano, che corrisponde a una superficie sferica di raggio infinito. Per questa lente il termine $1/r_2$ si annulla e la formula diventa: $1/f = (n-1)/r$.

36. Tracciate su un foglio un segmento nero e osservatelo attraverso una lente d'ingrandimento che solleverete in modo da avere un ingrandimento molto forte, tanto da iniziare a distorcere l'immagine. Ai lati dell'immagine del segmento appariranno due sottili strisce colorate, una tonalità rosso arancione, l'altra azzurra. Interpretate l'osservazione.

Risoluzione. La deflessione da parte della lente dei raggi luminosi provenienti dal segmento dipende dall'indice di rifrazione del vetro. Dato che questo varia leggermente al variare della lunghezza della luce, i colori di lunghezza d'onda più lunga e quelli di lunghezza d'onda più breve appaiono ai due lati dell'immagine del segmento.

37. Vogliamo utilizzare una lente biconvessa di ghiaccio per concentrare sott'acqua i raggi di un proiettore. Può funzionare?

Risoluzione. Esaminando la Tabella 1 si trova che l'indice di rifrazione del ghiaccio è minore di quello dell'acqua. Pertanto i raggi del proiettore, dopo aver attraversato la lente di ghiaccio, divergeranno anziché convergere.

38. Un oggetto luminoso si trova a una distanza fissa d da uno schermo. Spostando una lente convergente fra l'oggetto e lo schermo si trovano due posizioni per cui sullo schermo si forma un'immagine nitida dell'oggetto: 1) quando l'oggetto dista dalla lente $p_1 = 30$ cm; 2) quando l'oggetto dista dalla lente $p_2 = 120$ cm. Calcolate la distanza d e la distanza focale f della lente, e stabilite le caratteristiche dell'immagine nei due casi, incluso l'ingrandimento. (Suggerimento: scrivete le equazioni dei punti coniugati nelle due situazioni.)

Risoluzione. Notiamo innanzitutto che in entrambi i casi si tratta evidentemente di immagini reali e quindi $d = p_1 + q_1$ e $d = p_2 + q_2$. Le due distanze incognite d ed f si ricavano scrivendo le equazioni dei punti coniugati nelle due situazioni 1) e 2), dove esprimiamo le distanze dell'immagine dalla lente nella forma: $q_1 = d - p_1$, $q_2 = d - p_2$. Così procedendo si ha: $1/f = 1/p_1 + 1/(d - p_1)$, $1/f = 1/p_2 + 1/(d - p_2)$. Uguagliando i secondi membri delle due equazioni, moltiplicandoli per p_1 , p_2 , $d - p_1$, $d - p_2$ (che sono tutte grandezze diverse da zero), e semplificando si ottiene: $d(p_1 - p_2) = p_1^2 - p_2^2$. Da questa, essendo $p_1 - p_2$ diverso da zero, si ricava infine: $d = p_1 + p_2 = 0,3 + 1,2 = 1,5$ m. E quindi la distanza focale, utilizzando la prima delle due equazioni all'inizio, è: $f = 1/(1/p_1 + 1/(d - p_1)) = 1/(1/0,3 + 1/1,2) = 0,24$ m. Le distanze dell'immagine dalla lente sono poi evidentemente $q_1 = d - p_1 = 1,5 - 0,3 = 1,2$ m e $q_2 = d - p_2 = 1,5 - 1,2 = 0,3$ m. Agli stesso risultati si può arrivare, assai più semplicemente, ragionando, cioè ricordando che un punto oggetto e un punto immagine si possono scambiare fra loro. Se poi la distanza $d = p + q$ fra essi è costante, come nel nostro caso, allora nella situazione 1) avremo $q_1 = p_2 = 1,2$ m e $q_2 = p_1 = 0,3$ m. da cui si ricavano poi la distanza d e la distanza focale f . Gli ingrandimenti delle immagini, applicando la formula (11), sono: $I_1 = -q_1/p_1 = -1,2/0,3 = -4$, $I_2 = -q_2/p_2 = -0,3/1,2 = -0,25$, dove il segno negativo indica che le immagini sono capovolte.

39. Una lampadina a incandescenza emette 1000 lumen in un semispazio delimitato da un piano passante per il suo centro. Calcolate l'intensità luminosa di questa sorgente e valutate approssimativamente la potenza elettrica assorbita.

Risoluzione. L'intensità luminosa in unità di candele può essere espressa come il rapporto fra la luce emessa, in unità di lumen, e l'angolo solido, in unità di steradiani, nel quale la luce viene emessa. Dato che la sorgente emette nell'angolo solido 2π , la sua intensità luminosa è: $(1000 \text{ lumen})/(2\pi \text{ steradiani}) = 159$ candele. La potenza elettrica assorbita dalla sorgente si può ricavare approssimativamente con una proporzione dai dati della lampada che produce un flusso luminoso dello suo stesso ordine di grandezza (\rightarrow Tabella 4). Se una lampadina che assorbe 100 W produce 1300 lumen, per produrne 1000 occorreranno presumibilmente $100 \times 1000/1300 = 77$ W.

40. Le lampadine a incandescenza, parecchi anni or sono, erano commercializzate specificandone in candele la luce emessa, considerando tale grandezza numericamente uguale alla potenza elettrica assorbita. Valutate la congruità di questo regola empirica, utilizzando i dati della Tabella 4.

Risoluzione. Sappiamo che, per una sorgente che emette in tutte le direzioni, all'intensità luminosa di 1 candela corrisponde il flusso luminoso di 4π lumen. Una lampadina a incandescenza da 60 W emette 730 lumen, corrispondenti dunque a una intensità luminosa di $730/4\pi = 58$ candele, in ragionevole accordo con la regola empirica. Notate però che il rapporto fra lumen e watt varia, seppur debolmente, al variare della potenza delle lampadine.

41. Calcolate l'intensità luminosa (in candele) del Sole sapendo che l'illuminamento che esso produce sulla Terra, su una superficie perpendicolare ai suoi raggi è: $I_L = 1,3 \cdot 10^5$ lux. Confrontate il risultato che otterrete con quello dell'Esempio 11.

Risoluzione. Dato che 1 lux è l'illuminamento prodotto da una sorgente d'intensità luminosa di 1 candela su una superficie a 1 m dalla sorgente, l'illuminamento prodotto dal Sole, a 150 milioni di km, richiede l'intensità luminosa: $(1,5 \cdot 10^{11})^2 \times 1,3 \cdot 10^5 = 2,9 \cdot 10^{27}$ cd. Tale risultato è in accordo con quello dell'Esempio 11. Sapendo infatti che il flusso luminoso di una sorgente con intensità luminosa unitaria, che emette uniformemente in tutte le direzioni, è 4π , si conclude che il flusso luminoso del Sole è $4\pi \times 2,9 \cdot 10^{27} = 3,6 \cdot 10^{28}$ lumen.