

Relazione Bergamo scienza: pendolo ed ellitticità terrestre

Vittorio Adami, Leonardo Letizia, Pietro Marinoni, Alessandro Torri

8 novembre 2021

Introduzione

Il periodo T di un pendolo nelle piccole oscillazioni, come è noto, è espresso dalla formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dove con L si intende la lunghezza del filo e con g l'accelerazione di gravità terrestre. È considerata un'ottima oscillazione per angoli di apertura inferiori ai 5 gradi. g , a sua volta, si ottiene da

$$g = \frac{MG}{R^2}$$

Dove M è la massa terrestre, G la costante di gravitazione universale ed R il raggio terrestre. Combinando le due equazioni, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{MG}{R^2} &= \frac{4\pi^2 L}{T^2} \\ \Rightarrow R &= \frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{MG}{L}} \end{aligned}$$

Il fine dell'esperimento è, misurando con grande precisione il periodo del pendolo e la lunghezza del filo, ottenere una stima molto accurata del raggio terrestre, così da poterlo confrontare con (sperando in collaborazioni) i dati ottenuti ad altre latitudini o, alla peggio, i raggi polare ed equatoriale presi da internet, e verificare quindi la natura ellittica della terra.

Materiali

Per tentativi ed errori, siamo arrivati a stime molto precise con i seguenti strumenti:

- Un parallelepipedo metallico come pendolo; l'ideale sarebbe stato una sfera, ma il moto rotazionale del parallelepipedo non ha influito particolarmente sul periodo. La massa è di 3 chilogrammi, che sono stati sufficienti ad evitare deviazioni del moto date da correnti d'aria.
- Un filo in kevlar, materiale quasi del tutto inestensibile, atto a evitare moti elastici; il pendolo è alto circa 6 metri, in modo da minimizzare l'angolo di apertura del pendolo
- Un metro laser con errore di $\pm 0,2mm$
- La telecamera di un cellulare, grazie alla quale, filmando un adeguato numero di oscillazioni ed analizzando fotogramma per fotogramma, è possibile misurare il periodo del pendolo con sensibilità sul ventesimo di secondo.

Contando 100 oscillazioni del pendolo e misurandone precisamente l'istante iniziale e finale con lo smartphone, abbiamo ottenuto i seguenti dati:

l	T	g	R
5.905m	4.87101s	9.8252m/s ²	6368.81km
5.901m	4.86949s	9.8246m/s ²	6968.97km

Grazie all'esperimento di Foucault ¹ e data la relazione

$$R = \frac{24h}{\sin \alpha}$$

, dove R è il tempo in ore impiegato dal piano assiale del pendolo a compiere una rotazione completa e α la latitudine, deduciamo che la latitudine di Bergamo è di circa 45° . In assenza di collaborazioni esterne, diamo per noto il raggio polare della terra, ovvero circa $6356,9km$. Consideriamo una sezione trasversale della terra nel piano cartesiano, con l'origine nel centro della terra i poli disposti sull'asse y ; conosciamo la posizione di Bergamo in coordinate polari, $B(6368.89, \pi/4)$, che in cartesiane diventa $B(4503.89, 4053.89)$, e quella del polo nord, $P(0, 6356.9)$. Presa l'equazione di una generica ellisse con centro nell'origine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

¹Da realizzare e relazionare

, Troviamo che:

$$\begin{aligned} b &= 6356.9 \\ \frac{4503.89^2}{a^2} + \frac{4503.89^2}{b^2} &= 1 \\ \implies \frac{4503.89^2}{a^2} &= 1 - \frac{4503.89^2}{b^2} \\ \implies a^2 &= 4503.89^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{4503.89^2}{b^2}} \right) \\ \implies a &= 6382.01km \end{aligned}$$

Il raggio equatoriale reale è di $6378.4km$; l'errore complessivo è di $3.6km$, reputiamo si possa considerare una stima abbastanza precisa da poter verificare la natura ellittica della terra.