

Le equazioni del moto del pendolo di Foucault

Torri Alessandro, Marinoni Pietro, Letizia Leonardo, Adami Vittorio

XIX edizione di BergamoScienza



Indice

1	Introduzione	3
2	Le equazioni del moto del pendolo sferico	4
2.1	La posizione di un corpo in coordinate sferiche	4
2.2	Lagrangiana	5
2.3	Equazioni di Eulero-Lagrange	5
2.3.1	Risoluzione della prima equazione	6
2.3.2	Risoluzione della seconda equazione	7
3	L'equazione del moto del pendolo di Foucault	8
3.1	Premessa ed obiettivi	8
3.2	Il pendolo sulla superficie di un sistema rotante	8
3.3	Precisazioni	8
3.4	Trattazione matematica	9
4	Conclusioni	10

1 Introduzione

Attraverso un'esperimento portato avanti durante la XIX edizione di Bergamo-Scienza abbiamo avuto la possibilità di notare come il piano di oscillazione di un pendolo non rimanga totalmente fermo, bensì ruoti con una velocità angolare molto bassa (10° all'ora per la nostra latitudine). Tale fenomeno venne per la prima volta illustrato da Jean Bernard Léon Foucault, alla metà del XIX secolo. E' sorta perciò spontanea la curiosità di indagare la matematica che si cela dietro un esperimento all'apparenza così semplice. Ci siamo accorti che, in realtà, il problema di ricavare le equazioni del moto di un pendolo di Foucault è abbastanza complesso. Per prima cosa, conviene utilizzare il formalismo lagrangiano (e rimpiazzare dunque $F = ma$ con le equazioni di Eulero-Lagrange, di cui parleremo un po' più approfonditamente in seguito). Tale formalismo risulta molto utile in sistemi complicati, ma è meno immediato rispetto al secondo principio newtoniano.

Prima di parlare del pendolo di Foucault vero e proprio, presenteremo le equazioni del pendolo sferico. Esso è costituito da un filo inestensibile a cui è collegata una massa. La differenza con il pendolo semplice sta che, in questo caso, la massa possiede due gradi di libertà: essa si muoverà dunque tra i punti che costituiscono la superficie di una sfera ideale.

Una volta ricavate le equazioni del moto del pendolo sferico, potremo ricavare quelle di un pendolo di Foucault posto al polo nord terrestre. Per il momento, ci concentreremo sulla prima parte del procedimento.

2 Le equazioni del moto del pendolo sferico

2.1 La posizione di un corpo in coordinate sferiche

Si è data nell'introduzione una sommaria definizione di pendolo sferico. Per entrare più nello specifico, consideriamo un pendolo che si possa muovere soltanto su un piano. La massa di un tale sistema gode di un solo grado di libertà. Il pendolo sferico ha, invece, due gradi di libertà, perché il corpo può muoversi tra punti che sono situati idealmente sulla superficie di una sfera di raggio ρ , pari alla lunghezza del filo. Per descrivere la posizione della massa nello spazio, si utilizzano le coordinate sferiche, che semplificano notevolmente i calcoli. Dunque, date longitudine θ , latitudine ϕ e raggio ρ , la posizione di un punto S in coordinate cartesiane si descrive secondo la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Volendo trovare il quadrato della velocità del corpo in punto P della sfera, sommiamo i quadrati delle derivate rispetto al tempo delle componenti x, y e z della posizione:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \rho^2 \sin^2\phi \dot{\theta}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2$$

Indicando con un puntino al di sopra della funzione la derivata prima rispetto al tempo¹.

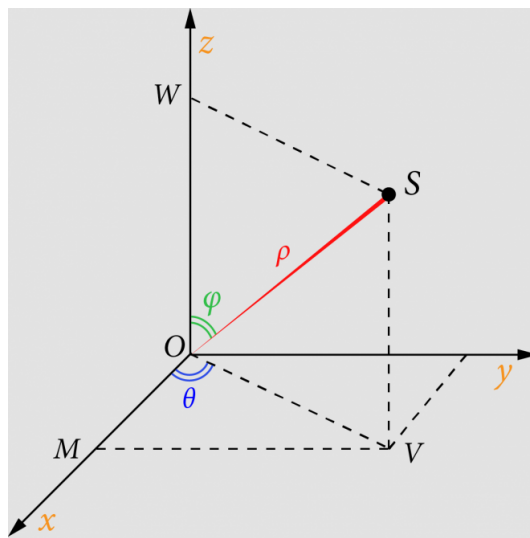


Figura 1: coordinate sferiche

¹Con i due puntini indicheremo successivamente la derivata seconda di una coordinata rispetto al tempo, ovvero l'accelerazione.

2.2 Lagrangiana

A questo punto, definiamo la lagrangiana del sistema. Essa è una funzione scalare, il cui valore è determinato dalla differenza tra l'energia cinetica T e quella potenziale U del corpo. La T del sistema sarà uguale a $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, mentre la U a mgz , con z pari a $\rho \cos\phi$. La lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema sarà dunque pari a:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\rho^2(\dot{\phi}^2 + \sin^2\phi \dot{\theta}^2) - mg\rho \cos\phi$$

A questa funzione $\mathcal{L}$ sono associate le così dette "equazioni di Eulero-Lagrange". Esse forniscono un'alternativa all'equazione $F = ma$. La loro scrittura e comprensione risulta meno immediata rispetto all'equivalente newtoniano, ma sono molto più comode in sistemi più complessi, come quello che stiamo analizzando. La funzione $\mathcal{L}$, infatti, come è stato già detto, è scalare. Il formalismo lagrangiano non richiede dunque l'impiego di campi vettoriali.

2.3 Equazioni di Eulero-Lagrange

Vediamo ora, per un corpo che si muove lungo una linea retta, posto alla posizione q e con velocità $\dot{q}$, come viene scritta l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Il termine posto tra parentesi indica la derivata parziale della Lagrangiana del sistema rispetto alla sua velocità. Una volta calcolato il valore di tale derivata parziale, lo deriviamo rispetto al tempo. Sottraiamo poi al tutto la derivata parziale di $\mathcal{L}$ rispetto alla posizione del corpo. Tale differenza deve risultare zero.

La dimostrazione della veridicità di tale equazione va al di là degli scopi della seguente analisi e non è fondamentale per seguire i ragionamenti successivi. Procediamo dunque alla trattazione vera e propria del problema del pendolo sferico. Abbiamo già definito la $\mathcal{L}$ come differenza tra energia cinetica e potenziale della massa m . Per poter scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema preso in esame dobbiamo ancora trovare la posizione e la velocità del corpo. Nell'esempio usato all'inizio della sottosezione 2.3, la massa si poteva muovere solamente lungo una linea retta. Abbiamo già detto che il pendolo sferico gode di due gradi di libertà. La sua posizione e la sua velocità non potranno dunque essere descritte soltanto da una coordinata q , bensì da due.

Ecco che ritornano utili le coordinate sferiche descritte precedentemente. Mediante l'utilizzo di due angoli ϕ e θ possiamo facilmente identificare la posizione e la velocità dell'oggetto. Il problema che si pone ora è il seguente: come possiamo scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del pendolo sferico, avendo due coordinate? La risposta è abbastanza semplice ed intuitiva. Basta infatti scrivere un sistema di due equazioni di Eulero-Lagrange. Nella prima equazione, le derivate parziali della lagrangiana saranno calcolate rispetto a $\dot{\theta}$ e θ , mentre nella seconda rispetto a $\dot{\phi}$ e ϕ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 & (1) \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 & (2) \end{cases}$$

2.3.1 Risoluzione della prima equazione

Risolviamo dunque le due equazioni separatamente, partendo dalla (1):

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

con

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\rho^2(\dot{\phi}^2 + \sin^2\phi \dot{\theta}^2) - mg\rho \cos\phi$$

e dunque

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2 \sin^2\phi \dot{\theta}$$

segue che:

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2 \sin^2\phi \dot{\theta}) = 0$$

Dalla soluzione dell'equazione (1), comprendiamo che esista una quantità (pari a $m\rho^2 \sin^2\phi \dot{\theta}$) che si conserva nel tempo (dato che la sua derivata prima rispetto a t è uguale a zero). Per gli scopi della nostra indagine, ci limiteremo a definire questa quantità pari ad una costante J , omettendo i termini m e ρ^2 , a loro volta costanti:

$$J = \sin^2\phi \dot{\theta}$$

Segue dunque che:

$$\dot{\theta} = \frac{J}{\sin^2\phi}$$

L'ultima equazione rappresenta la soluzione della (1): è stata trovata la velocità longitudinale del pendolo in funzione di J e ϕ .

2.3.2 Risoluzione della seconda equazione

Risolviamo ora l'equazione (2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

con

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \rho^2 (\dot{\phi}^2 + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2) - m g \rho \cos \phi$$

e dunque :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = m \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi + m g \rho \sin \phi$$

Segue che:

$$m \rho^2 \ddot{\phi} - (m \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi + m g \rho \sin \phi) = 0$$

Mettendo in evidenza $\ddot{\phi}$, abbiamo risolto la seconda ed ultima equazione del moto di un pendolo sferico:

$$\ddot{\phi} = \sin \phi \left(\dot{\theta}^2 \cos \phi + \frac{g}{\rho} \right)$$

3 L'equazione del moto del pendolo di Foucault

3.1 Premessa ed obiettivi

La finalità di questa terza sezione è quella di ricavare le equazioni del moto di un pendolo di Foucault posto al polo nord. Sappiamo che questo non sia l'obiettivo ultimo di una trattazione sul Pendolo di Foucault (la finalità dovrebbe essere più generale, ovvero quella di trovare le equazioni di un pendolo posto a qualunque latitudine), ma riteniamo che le idee che tale studio porta con sé siano abbastanza valide ed interessanti. Ci concentreremo sull'equazione che più ci interessa, ovvero quella che offre un valore della velocità longitudinale del pendolo.

3.2 Il pendolo sulla superficie di un sistema rotante

Per cominciare, analizziamo ciò che succede al pendolo una volta che viene posto al polo nord terrestre. L'esperienza ci mostra che il piano d'oscillazione ruota lentamente in senso orario, descrivendo un giro completo in 24 ore. Proviamo ora ad immaginare di allontanarci dalla Terra, e di vedere il pianeta dallo spazio. Che cosa osserveremmo da questo nuovo punto di vista? Noteremmo che la Terra gira al di sotto del pendolo, mentre il piano di oscillazione di quest'ultimo rimane fermo rispetto al riferimento assoluto. D'altra parte, rispetto alla Terra, che sta ruotando attorno al suo asse, si osserverebbe un lento movimento di precessione.

3.3 Precisazioni

L'argomentazione proposta nel 3.2 è sicuramente corretta. Tuttavia, per ricavare in maniera precisa le equazioni del pendolo di Foucault, occorre fare un appunto di significativa importanza. La rotazione del piano di oscillazione non è dovuta esclusivamente alla rotazione terrestre, bensì anche alla velocità longitudinale impressa al pendolo. Se infatti imponessimo velocità longitudinale nulla rispetto al riferimento terrestre, J non risulterebbe pari a zero, poichè il piano sarebbe fermo rispetto al pianeta, ma non rispetto alle stelle fisse. Ovviamente si tratta di un esperimento mentale: sarebbe impossibile conferire una velocità longitudinale al pendolo tale che l'angolo θ percorso dal pendolo sia uguale in modulo alla velocità angolare terrestre e che dunque renda vera la seguente equazione:

$$\int_0^T \frac{J}{\sin^2 \phi} dt = \omega T$$

così come, d'altra parte, sarebbe impossibile conferire impulso nullo, una volta che lasciamo oscillare il pendolo. Certamente, nel caso delle piccole oscillazioni, si può approssimare il pendolo sferico ad uno semplice. Dal punto di vista prettamente teorico, tuttavia, il nostro obiettivo è quello di trovare le equazioni del moto senza alcuna approssimazione, ma al massimo servendoci di semplificazioni (come quella di porre il pendolo al polo nord).

3.4 Trattazione matematica

Risulta, dopo queste dovute precisazioni, molto più semplice ricavare l'equazione della velocità e dell'accelerazione longitudinale del pendolo in ogni punto del suo moto. Le velocità che entreranno in gioco saranno ω e θc , descritta come:

$$\dot{\theta}c = \frac{J}{\sin^2\phi}$$

Risulta chiaro che la somma dei vettori delle due velocità darà come risultato il vettore θ . Considerando però il modulo di θ , ci si solleva il problema dei segni. Decidiamo di considerare come verso positivo quello di θc . L'equazione di θ risulterà dunque:

$$\dot{\theta} = \frac{J}{\sin^2\phi} - \omega \quad (3)$$

Abbiamo già dimostrato nel capitolo precedente che J è una costante. Il suo valore può dunque essere calcolato attraverso la formula:

$$J = \sin^2\phi_o (\dot{\theta}o + \omega)$$

Dove ϕ_o e $\dot{\theta}o$ rappresentano rispettivamente l'angolo rispetto alla verticale a cui lasciamo andare il pendolo e la velocità longitudinale iniziale. Dopo queste considerazioni, è facile ricavare le equazioni del moto:

$$\ddot{\theta} = -2\dot{\phi}(\dot{\theta} + \omega) \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

4 Conclusioni

L'ultima equazione ricavata è solo una delle due equazioni del moto del pendolo di Foucault posto al polo Nord. Riteniamo non necessario elencare i passaggi che portano alla seconda ed ultima equazione. Essi non aggiungono alcuna idea nuova rispetto a ciò che abbiamo cercato di spiegare in questa terza sezione: la cosa più importante è quella di aver capito che il pendolo di Foucault non è altro che un pendolo sferico, modificato da un termine costante dell'impulso (che nel caso del polo nord è proprio ω). La (1) e dalla (2) possono dunque essere viste come le equazioni del moto di un pendolo di Foucault posto in un sistema di riferimento inerziale.

Riferimenti bibliografici

- [1] Il Pendolo di Foucault and Palazzo della Ragione. Comune di padova.
- [2] Pendolo di Foucault. Le equazioni di moto del.
- [3] Léon Foucault. *Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule*. Editions de la librairie encyclopédique, 1951.
- [4] Michele T Mazzucato. 176. il pendolo di foucault.
- [5] David Tong. Classical dynamics. *Wilberforce Road, UK*, 139, 2005.